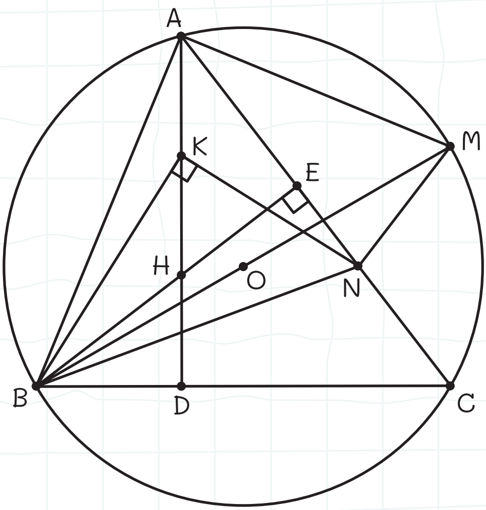
CHỦ ĐỀ 7

ĐƯỜNG TRÒN

HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI 1



a) Có $\widehat{HDC} = 90^\circ$ (đường cao) suy ra ba điểm H, D, C thuộc đường tròn đường kính HC.

Có $\widehat{CEH} = 90^\circ$ (đường cao), suy ra ba điểm C, E, H thuộc đường tròn đường kính HC.

Kết luận bốn điểm C, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính HC tứ giác CEHD nội tiếp.

b) Có $\widehat{AEH} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ và góc A chung; suy ra ΔAHE đồng dạng ΔACD.

Suy ra $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AE}{AD} \Rightarrow AH.AD = AE.AC$

c) Có $\widehat{KHE} = \widehat{ECB}$ (cùng phụ với $\widehat{DAC}$)

Có ΔBKN vuông tại K và ΔBEN vuông tại E nên bốn điểm B, K, E, N thuộc đường tròn đường kính BN, suy ra $\widehat{KNB} = \widehat{KEH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BK)

Xét ΔAEH vuông tại E có EK là đường trung tuyến nên KE = KH $\Rightarrow \Delta KHE$ cân tại K, suy ra $\widehat{KHE} = \widehat{KEH}$

Suy ra $\widehat{KNB} = \widehat{ECB}$ (đpcm)

d) Xét ΔKNB và ΔECB có: $\widehat{BKN} = \widehat{BEN} = 90^\circ$ và $\widehat{KNB} = \widehat{ECB}$

Suy ra $\Delta KNB \sim \Delta ECB \Rightarrow \dfrac{BK}{BN} = \dfrac{BE}{BC}$

Xét ΔAMB và ΔECB có: $\widehat{BAM} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ và $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Suy ra $\Delta AMB \sim \Delta ECB \Rightarrow \dfrac{BA}{BM} = \dfrac{BE}{BC}$. Từ đó suy ra $\dfrac{BA}{BK} = \dfrac{BM}{BN} \Rightarrow \dfrac{BA}{BM} = \dfrac{BK}{BN}$(1)

Có $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ABM} + \widehat{AMB} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} + \widehat{EBC} = 90^\circ$ nên $\widehat{ABM} = \widehat{EBC}$.

Mặt khác ta có $\widehat{ABK} + \widehat{KBM} = \widehat{ABM}$, $\widehat{MBN} + \widehat{KBM} = \widehat{KBN} = \widehat{EBC}$, suy ra $\widehat{ABK} = \widehat{MBN}$ (2)

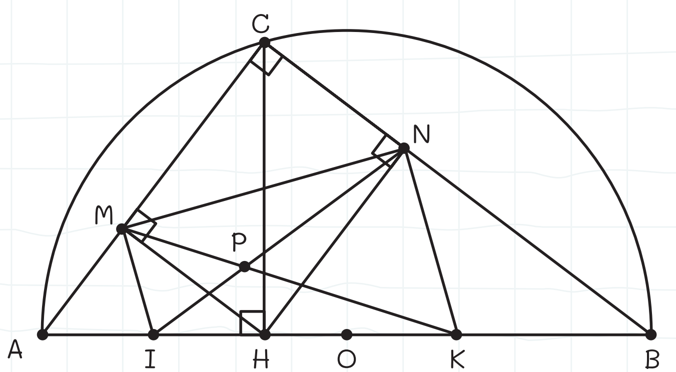
Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BAK \sim \Delta BMN \Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{BMN}$

Mà $\widehat{BAK} + \widehat{DAC} = \widehat{BAC}, \widehat{BMN} + \widehat{NMC} = \widehat{BMC}$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$ (2 góc nội tiếp chắn cung BC)

Suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{NMC}$. Mặt khác AD // CM $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{MNC}$.

Từ đó $\widehat{NMC} = \widehat{NCM}$ suy ra ΔNMC cân tại N hay NM = NC (đpcm)

BÀI 2



a) Ta có $\widehat{CMH} = \widehat{CNH} = \widehat{MCN} = 90^\circ$, suy ra tứ giác CMHN là hình chữ nhật. Suy ra bốn điểm C, M, H, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì tứ giác CMHN nội tiếp nên $\widehat{CNM} = \widehat{CHM}$ (cùng chắn cung CM).

Mà $\widehat{CHM} = \widehat{CAH}$ (cùng phụ với góc $\widehat{HCA}$) nên $\widehat{CNM} = \widehat{CAB}$.

Xét ΔNMC và ΔABC có: $\widehat{MCN} = \widehat{BCA}, \widehat{CNM} = \widehat{CAB}$

Suy ra $\Delta NMC \sim \Delta ABC$ (g.g)

Ta có $\widehat{HMN} = \widehat{HCN} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{BAC}$

Mà ΔAMH vuông tại M nên IA = IM = IH nên $\widehat{BAC} = \widehat{IAM} = \widehat{IMA}$, Suy ra $\widehat{HMN} = \widehat{IMA}$

Mà $\widehat{IMA} + \widehat{IMH} = \widehat{AMH} = 90^\circ$ nên $\widehat{HMN} + \widehat{IMH} = 90^\circ = \widehat{IMH}$

Suy ra $\widehat{IMH} = 90^\circ$ hay $IM \perp MN$

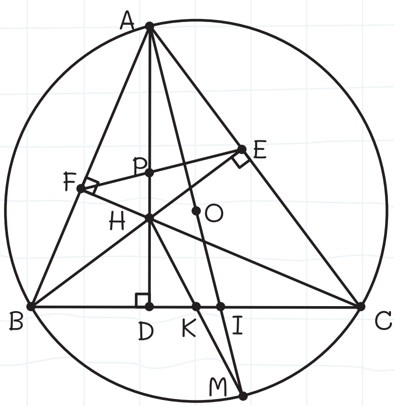
Chứng minh tương tự ta có $KN \perp MN$

Từ đó suy ra KN // IM

Khi đó $\dfrac{IM}{NK} = \dfrac{MP}{PK}$ mà IM = IH. NK = KH nên ta có:

$\dfrac{IH}{HK} = \dfrac{MP}{PK}$ suy ra PH // NK. Do đó $PH \perp MN$.

BÀI 3



a)

$\widehat{AFH} = 90^\circ$ (Vì CF là đường cao ΔABC) $\Rightarrow$ thuộc đường tròn đường kính AH

$\widehat{AEH} = 90^\circ$ (Vì BE là đường cao ΔABC) $\Rightarrow$ thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow$ 4 điểm A, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH

b) Ta có $\widehat{ACM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ADB} = 90^\circ$ (Vì AD là đường cao ΔABC)

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC của (O))

$\Rightarrow \Delta ADB \sim \Delta ACM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AM} \Rightarrow AD.AM = AB.AC$

c) Có BH // CM (cùng vuông góc với AC), CH // BM (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCM là hình bình hành

$\Rightarrow$ Hai đường chéo HK và BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Mà K là trung điểm của BC $\Rightarrow$ K là trung điểm của HM $\Rightarrow$ H, K, M thẳng hàng

Có $\Delta ADB \sim \Delta ACM$

Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$ nên $\widehat{BAD} + \widehat{DAM} = \widehat{DAM} + \widehat{MAC}$

Suy ra $\widehat{BAI} = \widehat{PAE}$

Có $\widehat{BDH} = \widehat{BFH} = 90^\circ$ nên ΔBDH vuông tại D và ΔBFH vuông tại F. Suy ra BFHD là tứ giác nội tiếp

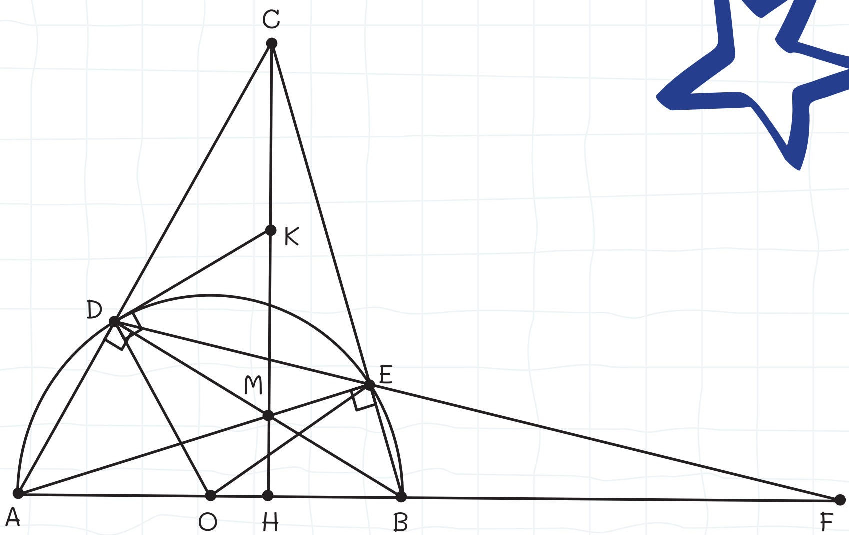
Có $\widehat{AEF} = \widehat{AHF}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AE). Mà $\widehat{AHF} = \widehat{ABI}$ (cùng bù với $\widehat{FHD}$)

Suy ra $\Delta APE \sim \Delta AIB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AE}{AB}$

Có $\widehat{BAI} = \widehat{PAE}$ và $\widehat{AEH} = \widehat{ABM} = 90^\circ$ nên $\Delta AHE \sim \Delta AMB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AE}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AH}{AM} \Rightarrow \dfrac{AP}{AH} = \dfrac{AI}{AM} \Rightarrow PI \,//\, HM$. (Định lý Thales đảo)

BÀI 4



a) Có $\widehat{ADM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \Delta ADM$ vuông tại D $\Rightarrow$ A, D, M cùng thuộc đường tròn đường kính AM.

Có $\widehat{AHM} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AHM$ vuông tại H $\Rightarrow$ A, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính AM.

Suy ra bốn điểm A, D, M, H cùng thuộc đường tròn đường kính AM.

b) Xét ΔABC có: CH, BD là hai đường cao và cắt nhau tại M

Suy ra M là trực tâm của tam giác ABC

Suy ra $AM \perp CB$ hay $AE \perp CB$ (1)

Có $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $AE \perp EB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra C, E, B thẳng hàng

c) Có ΔCDM vuông tại D và ΔCEM vuông tại E nên D, C, E, M cùng thuộc đường tròn đường kính MC.

Có $\widehat{ODB} + \widehat{KDM} = \widehat{ODK} = 90^\circ$ (OD là tiếp tuyến của (O))

$\widehat{OBD} + \widehat{BMH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OBD} + \widehat{KMD} = 90^\circ$ (do $\widehat{BMH} = \widehat{KMD}$ là 2 góc đối đỉnh)

Mà OB = OD $\Rightarrow \Delta OBD$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{ODB}$

Suy ra $\widehat{KDM} = \widehat{KMD}$ $\Rightarrow \Delta KDM$ cân tại K $\Rightarrow$ KD = KM (3)

Có $\widehat{KCD} + \widehat{DAH} = 90^\circ$ và $\widehat{KDC} + \widehat{KDO} + \widehat{ODA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{KDC} + \widehat{ODA} = 90^\circ$

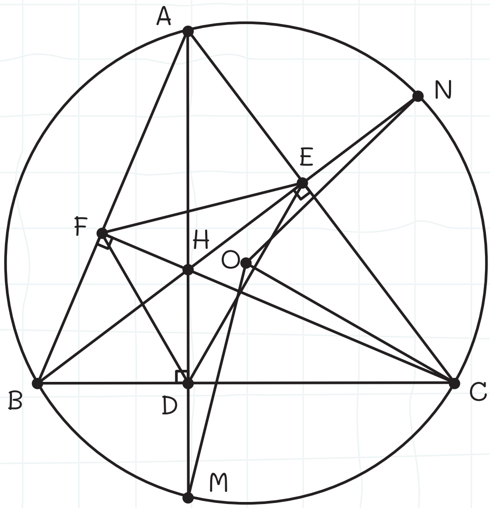
Mà OA = OD $\Rightarrow \Delta OAD$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODA}$

Suy ra $\widehat{KDC} = \widehat{KCD}$ $\Rightarrow \Delta KDC$ cân tại K $\Rightarrow$ KD = KC (4)

Từ (3) và (4) suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta DCM \Rightarrow$ K là tâm đường tròn ngoại tiếp DCEM.

Suy ra KE = KD.

BÀI 5



a)

Ta có $\widehat{BDA} = \widehat{BEA} = 90^\circ$ (AD, BE là hai đường cao của tam giác)

ΔABD vuông tại D nên A, B, D thuộc đường tròn đường kính AB.

ΔABE vuông tại E nên A, B, E thuộc đường tròn đường kính AB.

Do đó A, B, D, E thuộc đường tròn đường kính AB.

b)

Ta có tứ giác BAED là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$) (1)

Ta có tứ giác BANM là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BAM} = \widehat{BNM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BM}$)(2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BED} = \widehat{BNM}$ mà 2 góc ở vị trí đồng vị suy ra DE // MN.

Tứ giác ABDE nội tiếp nên $\widehat{EAD} = \widehat{EBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{DE}$) hay $\widehat{CAM} = \widehat{NBC}$ (3)

Ta lại có $\widehat{CAM} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{NC}$ (tính chất góc nội tiếp) (4)

và $\widehat{NBC} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{NC}$ (tính chất góc nội tiếp) (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra sđ$\overset{\frown}{MC}$ = sđ$\overset{\frown}{NC}$ suy ra C là điểm nằm chính giữa $\overset{\frown}{MN}$ nên MC = NC. Do đó điểm C thuộc đường trung trực của MN.

Ta lại có OM = ON nên O thuộc đường trung trực của MN.

Vì vậy OC là đường trung trực của MN nên $OC \perp MN$.

c) $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ (g.g) ($\hat{A}$ chung, $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$) nên $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$

Do đó AE.BC = AB.EF (*)

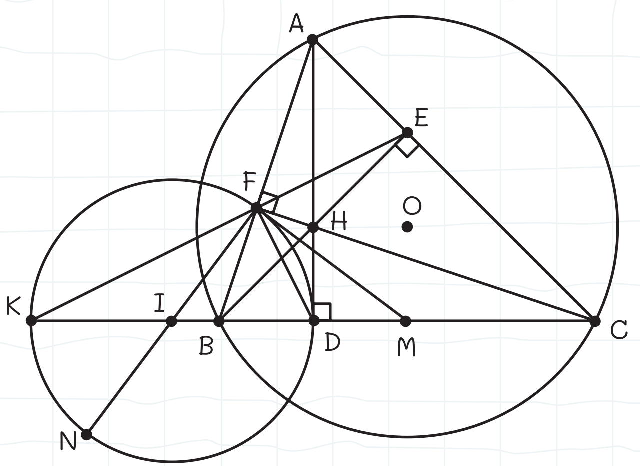
$\Delta CED \sim \Delta CBA$ (g.g) ($\hat{C}$ chung, $\widehat{CED} = \widehat{CBA}$) nên $\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA}$

Do đo CE.CA = CB.CD (**)

Nhân vế với vế của (*) và (**) ta có AE.BC.CE.CA = AB.EF.CB.CD. (***)

Chia cả hai vế của (***) cho BC ta được AE.CE.CA = AB.EF.CD (đpcm)

BÀI 6



a) $\widehat{ADC} = 90^\circ$, suy ra ba điểm A, D, C thuộc đường tròn đường kính AC.

$\widehat{AFC} = 90^\circ$, suy ra ba điểm A, F, C thuộc đường tròn đường kính AC.

Vậy bốn điểm A, F, D, C cùng thuộc đường tròn đường kính AC. (1)

b) Vì AFDC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BCA} + \widehat{AFD} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{BFD} = \widehat{BCA}$ (cùng bù với $\widehat{AFD}$). (2)

Chứng minh BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC tâm M. (3)

Suy ra $\widehat{BFK} = \widehat{BCA}$ (cùng bù với $\widehat{BFE}$).

Suy ra: $\widehat{BFD} = \widehat{BFK}$ nên FB là tia phân giác của góc DFK (đpcm). (4)

Từ (4) suy ra $\widehat{KFD} = 2\widehat{BFD}$.

Từ (3) suy ra $\widehat{BME} = 2\widehat{BCE}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BE) hay $\widehat{KME} = 2\widehat{BCA}$.

Kết hợp (2) suy ra $\widehat{KFD} = \widehat{KME}$.

Xét ΔKDF và ΔKEM có: $\widehat{KFD} = \widehat{KME}$ và $\widehat{K}$ chung.

Suy ra $\dfrac{KD}{KE} = \dfrac{KF}{KM}$ hay KD.KM = KE.KF đpcm.

c) Có ΔMBF cân tại M nên $\widehat{MFB} = \widehat{MBF}$.

Mà: $\widehat{MFB} = \widehat{MFD} + \widehat{BFD}$ và $\widehat{MBF} = \widehat{BKF} + \widehat{BFK}$

Kết hợp (4) suy ra $\widehat{MFD} = \widehat{BKF}$ hay $\widehat{MFD} = \widehat{DKF}$.

Giả sử tam giác KDF nội tiếp đường tròn tâm I có đường kính FN.

Ta có: $\widehat{DKF} = \widehat{DNF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung) nên $\widehat{MFD} = \widehat{DNF}$.

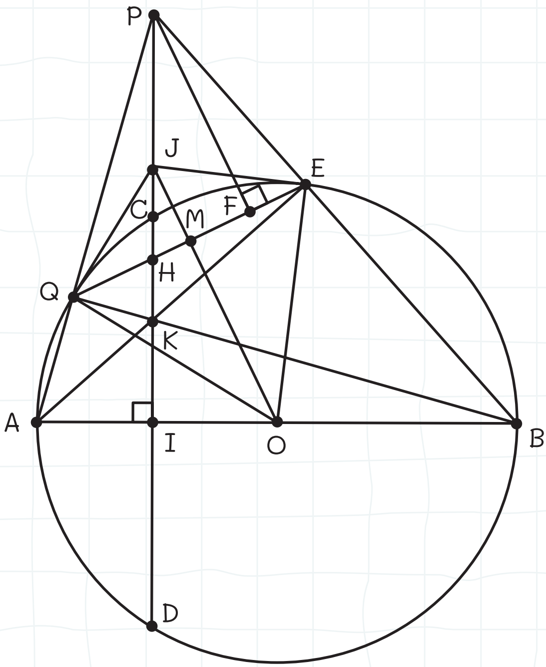
Suy ra $\widehat{MFI} = \widehat{MFD} + \widehat{DFN} = \widehat{DNF} + \widehat{DFN} = 180^\circ - \widehat{FDN} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

($\widehat{FDN}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Do đó MF vuông góc với bán kính IF của đường tròn tâm I tại F.

Vậy MF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KDF (đpcm).

BÀI 7



a) Xét (O;R) có: $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow$ vuông tại E suy ra K, E, B thuộc đường tròn đường kính KB (1)

Đường kính AB vuông góc với dây CD tại điểm I $\Rightarrow \widehat{KIB} = 90^\circ \Rightarrow$ vuông tại I suy ra K, I, B thuộc đường tròn đường kính KB (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm K, E, B, I cùng thuộc một đường tròn.

b)

Xét ΔAPB có: PI, AE là hai đường cao cắt nhau tại K

$\Rightarrow$ K là trực tâm của $\Delta APB \Rightarrow BQ \perp AP$

Xét ΔPQB và ΔPEA, ta có: $\widehat{APB}$ là góc chung và $\widehat{PQB} = \widehat{PEA} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta PQB \sim \Delta PEA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{PE} = \dfrac{PB}{PA} \Rightarrow$ PQ.PA = PE.PB

c) Chứng minh OQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE

Theo chứng minh trên $BQ \perp AP \Rightarrow \widehat{AQB} = 90^\circ$ suy ra $Q \in (O)$.

Vì $\widehat{PQK} = \widehat{PEK} = 90^\circ$ nên chứng minh được bốn điểm P, Q, K, E cùng thuộc đường tròn đường kính PK.

Suy ra tứ giác PQKE nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác PQKE $\Rightarrow$ J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE.

Ta chứng minh JQ vuông góc với OQ.

Có $\widehat{QPK} + \widehat{QKP} = 90^\circ$, $\widehat{OBK} + \widehat{IKB} = 90^\circ$ mà $\widehat{IKB} = \widehat{QKP}$ (2 góc đối đỉnh) nên $\widehat{QPK} = \widehat{QBO}$

Suy ra $\widehat{OQB} = \widehat{OBQ} = \widehat{QPK} = \widehat{JQP}$

Mà $\widehat{JQP} + \widehat{JQK} = \widehat{PQB} = 90^\circ$ nên $\widehat{JQO} = 90^\circ$

Suy ra OQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE.

Gọi H là giao của PI và EQ.

Tương tự ta cũng có OE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE. Suy ra JQ = JE

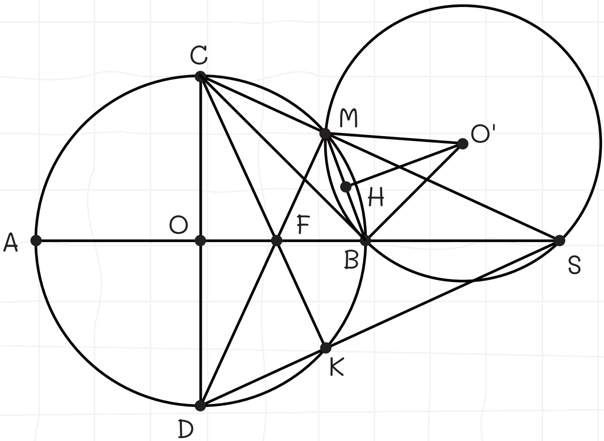
Và do có OQ = OE nên OJ là trung trực của EQ. Suy ra OJ vuông với QE $\Rightarrow$ JO // PF.

Suy ra $\dfrac{HM}{MF} = \dfrac{HJ}{JP}$

Có $JK^2 = JQ^2 = JM.JO = JH.JI$ (do $\Delta JQM \sim \Delta JOQ$ và $\Delta JHM \sim \Delta JOI$)

Suy ra $\dfrac{HJ}{JK} = \dfrac{HK + HJ}{KI + JK} = \dfrac{JK}{JI} \Rightarrow \dfrac{HM}{MF} = \dfrac{HK}{KI} \Rightarrow KM \,//\, IF$

BÀI 8



a) Có $\widehat{COF} = 90^\circ; \widehat{CMF} = 90^\circ$. Suy ra C, O, F cùng thuộc đường tròn đường kính CF và C, M, F cùng thuộc đường tròn đường kính CF

Suy ra O, M, C, F cùng thuộc một đường tròn nên tứ giác OCMF nội tiếp

b) Có $\widehat{SOD} = 90^\circ$ (do giả thiết)

Xét tam giác SCD có: SO, DM là hai đường cao cắt nhau tại F.

$\Rightarrow$ F là trực tâm tam giác SCD nên CF là đường cao $\Rightarrow CK \perp DS$.

Mặt khác $\widehat{CKD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CK \perp DK$

Suy ra ba điểm S, K, D thẳng hàng

Vì $\widehat{SKF} = \widehat{SOD} = 90^\circ$ và $\hat{S}$ chung nên $\Delta SKF \sim \Delta SOD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{SK}{SO} = \dfrac{SF}{SD}$

c) Có $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Mà $\widehat{MDC} = \widehat{MSB}$ (2 góc cùng phụ với $\widehat{OCM}$) nên $\widehat{MBC} = \widehat{CSB}$

Kẻ $O'H \perp MB$ tại H

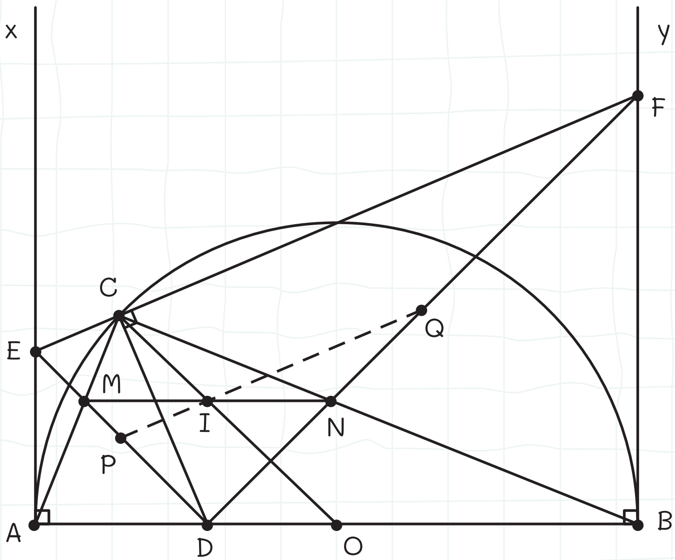
$\Delta MO'B$ cân tại O' nên đường cao O'H cũng là đường phân giác, do đó suy ra được $\widehat{BO'H} = \widehat{BSM}\left(= \dfrac{1}{2}\widehat{MO'B}\right)$ (góc ở tâm và góc nội tiếp chắn cung MB)

Mà $\widehat{MBC} = \widehat{CSB}$ nên $\widehat{MBC} = \widehat{BO'H}$

Do đó $\widehat{MBC} + \widehat{MBO'} = \widehat{BO'H} + \widehat{MBO'} = 90^\circ$ (Vì $\Delta O'HB$ vuông tại H)

Nên $O'B \perp BC$, từ đó suy ra CB là tiếp tuyến của đường tròn (O').

BÀI 9



a) Có tia Ax , By là tiếp tuyến của (O) nên $Ax \perp AB$, $By \perp AB$

Do đó ΔADE vuông tại A

$\Rightarrow \Delta ADE$ nội tiếp đường tròn đường kính DE (1)

Có $EF \perp CD$ tại C nên ΔCDE vuông tại C

$\Rightarrow \Delta CDE$ nội tiếp đường tròn đường kính DE (2)

Từ (1) và (2) ta có bốn điểm A, D, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính DE

b) Do ΔBDF vuông tại B

$\Rightarrow \Delta BDF$ nội tiếp đường tròn đường kính DF (3)

Do ΔCDF vuông tại C

$\Rightarrow \Delta CDF$ nội tiếp đường tròn đường kính DF (4)

Từ (3) và (4) ta có bốn điểm B, D, F, C cùng thuộc đường tròn đường kính DF

Trong đường tròn đường kính DF có: $\widehat{CFD} = \widehat{CBD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$)

Trong đường tròn đường kính DE có $\widehat{CED} = \widehat{CAD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$)

Trong (O) có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên tam giác ABC vuông tại C nên $\widehat{CAB} + \widehat{CBA} = 90^\circ$

Mà $\widehat{CFD} = \widehat{CBD}, \widehat{CED} = \widehat{CAD}\left(cmt\right) \Rightarrow \widehat{DEC} + \widehat{DFC} = 90^\circ$

Hay $\widehat{DEF} + \widehat{DFE} = 90^\circ$

Suy ra ΔDEF vuông tại D

c) Chứng minh C, D, M, N cùng thuộc đường tròn đường kính MN $\Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{CDN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CN}$)

Trong đường tròn đường kính DF có $\widehat{CDF} = \widehat{CBF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CF}$)

Chứng minh được: $\widehat{CBF} = \widehat{CAB}$ (Cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$)

Suy ra: $\widehat{CMN} = \widehat{CDN} = \widehat{CBF} = \widehat{CAB} \Rightarrow MN // AB$

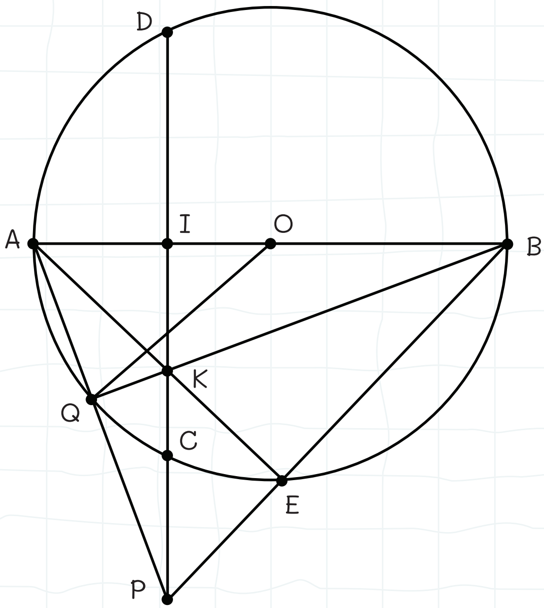
ΔCAO có MI // AO nên $\dfrac{MI}{AO} = \dfrac{CI}{CO}$ (Áp dụng hệ quả của Thales)

ΔCOB có NI // BO nên $\frac{CI}{CO} = \frac{IN}{OB}$ (Áp dụng hệ quả của Thales)

Suy ra $\frac{MI}{AO} = \frac{CI}{CO} = \frac{IN}{OB}$ mà OA = OB nên MI = IN

$\Rightarrow$ I là trung điểm của OC

BÀI 10



a)

Có $\widehat{KEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \Delta KEB$ vuông tại E $\Rightarrow$ K, E, B thuộc đường tròn đường kính KB.

Có $\widehat{KIB} = 90^\circ$ (giả thiết) $\Rightarrow \Delta KIB$ vuông tại I $\Rightarrow$ K, I, B thuộc đường tròn đường kính KB.

Suy ra K, E, I, B thuộc cùng 1 đường tròn nên tứ giác KEBI là tứ giác nội tiếp.

b)

Xét ΔAKI và ΔABE, ta có:

$\hat{A}$ là góc chung

$\widehat{AIK} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ Suy ra $\Delta AKI \sim \Delta ABE$ (g.g)

Do đó: $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{AI}{AE}$

Suy ra: AK.AE = AI.AB đpcm

c) Xét ΔAPB có: $PI \perp AB$ ($I \in AB$);

$AE \perp PB$ ($E \in PB$) ;

PI cắt AE tại K.

Suy ra K là trực tâm của ΔAPB

Suy ra: $BQ \perp AP$ ($Q \in AP$)

Do đó $\widehat{AQB} = 90^\circ$

hay $\widehat{AQK} = 90^\circ$ suy ra $Q \in (O;R)$

Ta có: $\widehat{AIK} = 90^\circ$ (đường kính AB vuông góc với dây CD tại điểm I)

Chứng minh được bốn điểm A, I, K, Q cùng thuộc đường tròn đường kính AK suy ra AIKQ là tứ giác nội tiếp)

Suy ra $\widehat{QAK} = \widehat{QIK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QK)

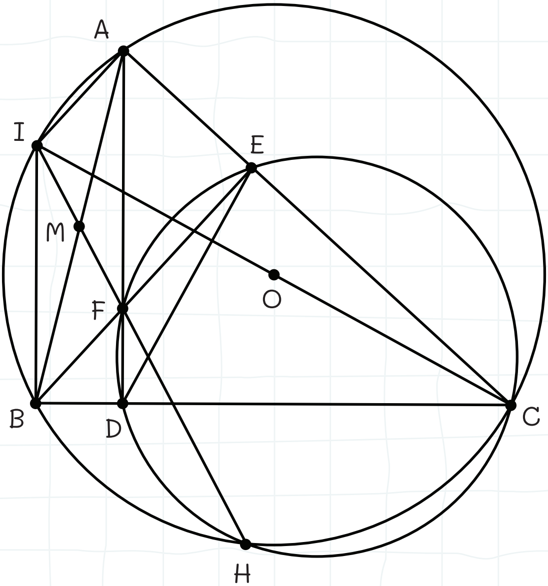
Ta có: KEBI là tứ giác nội tiếp (cmt)

Suy ra: $\widehat{KIE} = \widehat{KBE}$ (hai góc nt cùng chắn cung EK)

Lại có: $\widehat{QAK} = \widehat{KBE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QE)

Do đó $\widehat{KIE} = \widehat{KIQ}$ hay IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$ (đpcm)

BÀI 11



a)

Có $AD \perp BC$ và $BE \perp AC$

Vì ΔABD vuông tại D nên tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AB. Do đó, ba điểm A, B, D cùng thuộc đường tròn đường kính AB.

Vì ΔAEB vuông tại E nên tam giác ΔAEB nội tiếp dường tròn đường kính AB. Do đó, ba điểm A, E, B cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

Vậy 4 điểm A, B, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính AB hay tứ giác ABDF nội tiếp được đường tròn.

b) Xét ΔCBE và ΔCAD có

$\widehat{BEC} = \widehat{CDA} = 90^\circ$

$\widehat{BCE}$ là góc chung

Suy ra $\Delta CBE \sim \Delta CAD$ (g.g)

Suy ra $\frac{CB}{CA} = \frac{CE}{CD}$ suy ra CB.CD = CE.CA

c) Gọi F là giao điểm của AD và BE. Suy ra F là trực tâm của tam giác ABC.

Có $\widehat{IAC} = 90°, \widehat{IBC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow IA \perp AC, IB \perp BC$

Suy ra IA // BF và BI // AF

Vậy tứ giác AIBF là hình bình hành. Có M là trung điểm AB $\Rightarrow$ M là trung điểm IF.

Suy ra I, M, F thẳng hàng. (1)

Có $\widehat{IHC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow IH \perp HC$ (2)

Có $\widehat{FCD} = \widehat{FEC} = 90°$ nên ΔFCD vuông tại D và ΔFEC vuông tại E.

Suy ra F, C, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính FC nên tứ giác CDFE nội tiếp đường tròn đường kính FC

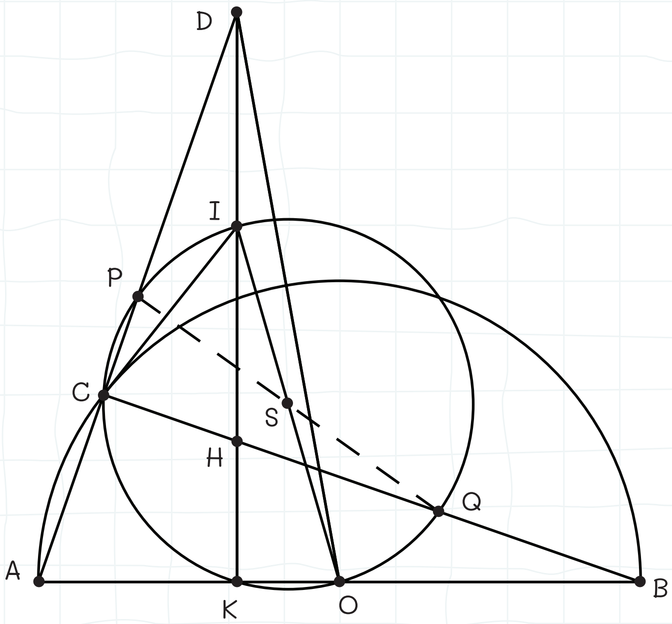
Mà H thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCDE nên H thuộc đường tròn đường kính FC.

Suy ra $\widehat{FHC} = 90°$ suy ra $FH \perp HC$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra I, F, H thẳng hàng. (4)

Từ (1), (4) suy ra I, M, H thẳng hàng.

BÀI 12



a)

Có $\widehat{ACH} = \widehat{AKH} = 90^\circ$

ΔACH vuông tại C nên 3 điểm A, C, H cùng thuộc đường tròn tâm E bán kính $\frac{AH}{2}$.

ΔAKH vuông tại K nên 3 điểm A, K, H cùng thuộc đường tròn tâm E bán kính $\frac{AH}{2}$.

Từ đó suy ra 4 điểm A, C, H, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng AC và đường thẳng HK cắt nhau tại D. Gọi I là trung điểm DH. Chứng minh KA.KB = KH.KD

Tứ giác AKHC nội tiếp nên $\widehat{CAK} + \widehat{CHK} = 180^\circ$

$\widehat{CHK}, \widehat{KHB}$ là 2 góc kề bù nên $\widehat{CHK} + \widehat{KHB} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{CAK} = \widehat{KHB}$ hay $\widehat{KAD} = \widehat{KHB}$ và $\widehat{AKD} = \widehat{HKB} = 90^\circ$

Suy ra $\Delta KAD \sim \Delta KHB$ (g.g)

Dẫn đến $\frac{KA}{KH} = \frac{KD}{KB} \Rightarrow KA.KB = KH.KD$

IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

$OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$

ΔHCD vuông tại C và I là trung điểm DH nên $IC = ID = IH \Rightarrow \Delta ICH$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{ICH} = \widehat{IHC}$. Mà $\widehat{IHC} = \widehat{KHB}$ (2 góc đối đỉnh)

Vậy $\widehat{ICH} + \widehat{OCB} = \widehat{KHB} + \widehat{OBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ICO} = 90^\circ \Rightarrow IC \perp OC$

OC là bán kính của đường tròn nên IC là tiếp tuyến của đường tròn

c)

ΔICO và ΔIKO vuông tại C, K. Từ đó 4 điểm I, C, K, O cùng thuộc đường tròn đường kính OI. Vậy S là trung điểm OI.

Có: IP là đường trung bình của ΔAHD nên IP // AH và $IP = \frac{1}{2}AH$

Có: OQ là đường trung bình của ΔAHB nên OQ // AH và $OQ = \frac{1}{2}AH$

Suy ra IP // OQ và IP = OQ

$\Rightarrow$ IPOQ là hình bình hành. Theo tính chất, S là trung điểm IO, cũng là trung điểm PQ.