

Dạng 3: Bài toán chứng minh chia hết

Bài 1: Phân tích:

Ta có: $n^3 - n = n(n^2 - 1)$

Mà một số chính phương chia 3 chỉ có số dư là 1 hoặc 0 (HS tự chứng minh bằng đồng dư) nên ta có 2 trường hợp

- Trường hợp 1: n chia hết cho 3 khi đó $n(n^2 - 1)$ chia hết cho 3
- Trường hợp 2: n không chia hết cho 3, khi đó n^2 chia 3 dư 1 nên $n^2 - 1$, suy ra $n(n^2 - 1)$ chia hết cho 3

Khi đó ta thấy $n(n^2 - 1)$ luôn chia hết cho 3

Tiếp đó là chia hết cho 2, ta xét n chẵn hoặc n lẻ

- Nếu n chẵn hiển nhiên $n(n^2 - 1)$ chia hết cho 2
- Nếu n lẻ thì $n^2 - 1$ chẵn, khi đó $n(n^2 - 1)$ chia hết cho 2

Vậy $n(n^2 - 1)$ luôn chia hết cho 2;3 và 2;3 là 2 số nguyên tố cùng nhau

nên $n(n^2 - 1)$ chia hết cho 6

Bài 2

a. Cách 1 (dùng modulo 6):

$$7 \equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow 7^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{6}.$$

Khi đó $7^n - 1 \equiv 0 \pmod{6}$. Thực ra, phép tính này cho thấy mọi n đều được, chứ không chỉ n chẵn.

Cách 2 (phân tích với n chẵn):

$$\text{Nếu } n = 2k, 7^n = 7^{2k} = (7^k)^2.$$

Thông thường khi gặp $7^k - 1$ và $7^k + 1$ ta thấy hai số này hơn kém nhau 2, nên tích $(7^k - 1)(7^k + 1)$ có tính chất chia hết 2. Tuy nhiên cách đơn giản là modulo như trên.

(b) Có đúng chia hết 6 với mọi n không?

Thực ra, như đã chỉ ra: $7 \equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow 7^n \equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow 7^n - 1 \equiv 0 \pmod{6}$.

Vậy mọi n dương (kể cả lẻ) đều cho a_n chia hết 6.

(c) Tìm tất cả n sao cho a_n chia hết 8.

Xét modulo 8: $7 \equiv -1 \pmod{8}$.

$$7^n \equiv (-1)^n \pmod{8}.$$

Nếu n lẻ: $(-1)^n = -1$, $\Rightarrow 7^n - 1 \equiv -2$, không chia hết cho 8.

Nếu n chẵn: $(-1)^n = 1$, $\Rightarrow 7^n - 1 \equiv 0 \pmod{8}$.

Kết luận: n chẵn là nghiệm để $7^n - 1$ chia hết 8.

Bài 3

a. Trên thực tế,

$$2^{2n} = (2^2)^n = 4^n, \quad 4 \equiv 1 \pmod{3}$$

Vậy $b_n = 4^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$

$$\Rightarrow 4^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{3}$$

Lưu ý: Kết quả này đúng cho mọi $n \geq 1$ (kể cả chẵn hay lẻ), vì

$$4 \equiv 1 \pmod{3}.$$

(b) Kiểm tra n chẵn cũng ra $\equiv 0 \pmod{3}$. Nghĩa là thực ra $2^{2n} - 1$ chia hết 3 với mọi $n \geq 1$.