

Dạng 2: Tìm giá trị nhỏ nhất - giá trị lớn nhất

Bài 1: $f(x) = x + \frac{9}{x}, x > 0$.

$$\text{AM-GM: } \frac{x + \frac{9}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = \sqrt{9} = 3.$$

Suy ra $x + \frac{9}{x} \geq 6$.

Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 6.

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{9}{x} \Rightarrow x = 3$.

Bài 2: Cho $x, y, z \geq 0, x + y + z = 6$ Xét $Q = x^2 + y^2 + z^2$.

(a) Tìm giá trị nhỏ nhất của Q:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) &\geq (x + y + z)^2 = 6^2 \\ \Rightarrow 3Q &\geq 36 \Rightarrow Q \geq 12 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$

b) Tìm giá trị lớn nhất của Q:

Ta có:

$$Q = x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = (x + y + z)^2 = 6^2 = 36$$

Dấu bằng xảy ra khi $2xy + 2yz + 2xz = 0$ tức là trong 3 số x, y, z có 2 số bằng 0

Khi đó ta có Q lớn nhất là 36 khi $x = 6, y = z = 0$ hoặc $y = 6, x = z = 0$ hoặc $z = 6, x = y = 0$