

## 2. Dạng 2: Các bài sử dụng quan hệ chia hết

### Bài 1:

Chứng minh  $3^4 - 1$  chia hết cho 2.

Tính trực tiếp:  $3^4 = 81, 3^4 - 1 = 80$ .

Rõ ràng 80 là số chẵn ( $80/2 = 40$ ), nên 80 chia hết cho 2.

Vì vậy,  $3^4 - 1$  chia hết cho 2.

### Bài 2

Tính số dư khi chia  $7^5$  cho 3; dự đoán điều kiện chia hết.

Trước hết,  $7 \equiv 1 \pmod{3}$  (vì 7 chia 3 dư 1).

Suy ra  $7^5 \equiv 1^5 = 1 \pmod{3}$ .

Tức là  $7^5$  chia 3 còn dư 1.

Điều kiện để  $7^n$  chia hết cho 3?

Ta thấy  $7 \equiv 1 \pmod{3}$ , do đó  $7^n \equiv 1^n = 1 \pmod{3}$  (với  $n$  là số nguyên dương).

Vì bằng 1  $\pmod{3}$ , nên không thể bằng 0  $\pmod{3}$ .

Kết luận: Không có giá trị  $n$  nguyên dương nào để  $7^n$  chia hết 3

### Bài 3

Kiểm tra  $A = 89$  có phải số nguyên tố không.

Ta kiểm tra 89 có ước nào nhỏ hơn chính nó (trừ 1)?

Các ước tiềm năng: 2, 3, 5, 7... (bất kỳ số nguyên tố nào nhỏ hơn  $\sqrt{89}$  là  $\sqrt{89/2}$ ).

89 chia 2 dư 1.

89 chia 3 dư 2.

89 chia 5 dư 4.

89 chia 7 dư 5.

89 chia 11 dư 1.

89 chia 13 dư 11

89 chia 17 dư 4

89 chia 19 dư 13

89 chia 23 dư 20

89 chia 29 dư 2

89 chia 31 dư 27

89 chia 37 dư 15

89 chia 41 dư 7

Không thấy bất kì số dư nào bằng 0 khi chia.

Kết luận: 89 không có ước khác 1 và 89 nên 89 là số nguyên tố.

#### **Bài 4**

a) Phân tích 180:

Bước 1:  $180 = 2 \times 90$

Bước 2:  $90 = 2 \times 45$

Bước 3:  $45 = 3 \times 15$

Bước 4:  $15 = 3 \times 5$

Vậy:  $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ .

b) Tìm mọi ước của 180 có dạng  $2^k \cdot 3^m$ .

Trong  $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ , để bỏ qua thừa số 5, ta chỉ lấy  $2^k \cdot 3^m$  với

$0 \leq k \leq 2, 0 \leq m \leq 2$ .

Các cặp (k, m) có thể có:

(0,0): 1

(1,0): 2

(2,0): 4

(0,1): 3

$$(1,1): 6$$

$$(2,1): 12$$

$$(0,2): 9$$

$$(1,2): 18$$

$$(2,2): 36$$

Vậy tất cả ước dạng  $2^k \cdot 3^m$  (bỏ 5) là: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

### **Bài 5**

Cho  $x = 60$  và  $y = 84$ .

Phân tích ra thừa số nguyên tố:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7.$$

Tìm  $\text{UCLN}(x, y)$  và  $\text{BCNN}(x, y)$

$\text{UCLN}(60, 84)$ : Lấy các thừa số chung với số mũ nhỏ nhất

$$2: \min(2, 2) = 2$$

$$3: \min(1, 1) = 1$$

5 (có ở 60, không có ở 84)  $\rightarrow$  bỏ

7 (có ở 84, không có ở 60)  $\rightarrow$  bỏ

$$\text{Vậy } \text{UCLN} = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12.$$

$\text{BCNN}(60, 84)$ : Lấy các thừa số có ở một trong hai (hoặc cả hai) với số mũ lớn nhất

$$2: \max(2, 2) = 2$$

$$3: \max(1, 1) = 1$$

$$5: \max(1, 0) = 1$$

$$7: \max(0, 1) = 1$$

$$\text{Nên BCNN} = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1 = 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 420.$$

Kiểm chứng

$$x \times y = 60 \times 84 = 5040, \text{UCLN}(x, y) \times \text{BCNN}(x, y) = 12 \times 420 = 5040.$$

Trùng khớp.

### **Bài 6:**

$$\text{Biểu thức: } P = 5^{2n} - 2^{2n}.$$

Ta có với  $n = 1$  thì  $P = 25 - 4 = 21$  và 21 không chia hết cho 9 nên ta không cần chứng minh

**Bài 7:** Phân tích biểu thức:  $n(n+1)$ . Đây là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Xét hai trường hợp

- Trường hợp 1:  $n$  chẵn, nghĩa là  $n = 2k$ .

$$n(n+1) = 2k(2k+1).$$

Trong tích này đã có thừa số 2 (từ  $2k$ ), vậy hiển nhiên chia hết cho 2.

- Trường hợp 2:  $n$  lẻ, nghĩa là  $n = 2k+1$ .

$$n+1 = (2k+1)+1 = 2k+2 = 2(k+1).$$

$$\text{Vậy: } n(n+1) = (2k+1) \cdot [2(k+1)].$$

Trong tích này cũng có thừa số 2 (từ  $2(k+1)$ ), nên chia hết cho 2.

Kết luận: Dù  $n$  chẵn hay lẻ, tích  $n(n+1)$  luôn chứa một thừa số 2, nên  $n(n+1)$  luôn chia hết cho 2 đối với mọi số nguyên  $n$ .

**Bài 8:** Giả sử  $m$  chia hết cho 6 và 15. Tức:

$$\Rightarrow m \equiv 0(\text{mod } 6), m \equiv 0(\text{mod } 15).$$

$$6 = 2 \times 3.$$

$$15 = 3 \times 5.$$

$\Rightarrow m$  phải có đủ các thừa số 2 (ít nhất 1 lần), 3 (ít nhất 1 lần), và 5 (ít nhất 1 lần).

Suy ra  $m$  chắc chắn chia hết cho  $2 \times 3 \times 5 = 30$ .

Kết luận: Có.  $m$  sẽ chia hết cho 30.

### **Bài 9:**

a)  $\text{UCLN}(36, 54)$ :

Cách nhanh:  $36 = 2^2 \cdot 3^2$ ,  $54 = 2 \cdot 3^3$ .

$$\text{UCLN} = 2^1 \cdot 3^2 = 18.$$

$$\text{BCNN} = 2^2 \cdot 3^3 = 108.$$

$$\text{UCLN}(48, 90): 48 = 2^4 \cdot 3^1, 90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

$$\text{UCLN} = 2^1 \cdot 3^1 = 6.$$

$$\text{BCNN} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 144 \cdot 5 = 720.$$

b)

Số nhỏ nhất khác 0 chia hết cho cả 36 và 54 chính là

$$\text{BCNN}(36, 54) = 108.$$

Số lớn nhất dưới 200 chia hết cho 36 và 54 là bội gần 200 nhất của 108.

$$108 \times 1 = 108$$

$$108 \times 2 = 216 \text{ (lớn hơn 200)}$$

Vậy số lớn nhất dưới 200 là 108.

### **Bài 10:**

Bài toán lời văn: 60 chiếc bánh, chia đều vào các hộp sao cho số bánh mỗi hộp  $> 5$  và chia hết cho 3.

Điều kiện 1: Số bánh mỗi hộp  $> 5$ .

Điều kiện 2: Chia hết cho 3.

Số bánh mỗi hộp phải là một ước của 60, đồng thời là bội số của 3, và phải  $> 5$ .

Liệt kê ước của 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Loại bỏ 1, 2, 3, 4, 5 ( $\leq 5$ ).

Giữ lại: 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Trong số này, ta chỉ lấy bội số của 3: 6, 12, 15, 30, 60  $\rightarrow$  nhưng 15 có bội số của 3, ok. Kiểm tra:  $15 \div 3 = 5$ , đồng ý, 15 là bội số của 3.

Vậy các cách chia thỏa mãn:

Mỗi hộp 6 bánh  $\rightarrow 60/6 = 10$  hộp.

Mỗi hộp 12 bánh  $\rightarrow 60/12 = 5$  hộp.

Mỗi hộp 15 bánh  $\rightarrow 60/15 = 4$  hộp.

Mỗi hộp 30 bánh  $\rightarrow 60/30 = 2$  hộp.

Mỗi hộp 60 bánh  $\rightarrow 60/60 = 1$  hộp (tất cả bánh vào 1 hộp,  $> 5$ , vẫn hợp lệ).

### **Bài 11:**

Hiểu bội số của 3: Mọi bội số của 3 đều viết được dưới dạng  $3k$ , với  $k$  là số nguyên (thường ta lấy  $k \geq 0$  để được các bội số không âm).

- Xác định giới hạn: Đề bài yêu cầu “nhỏ hơn 25”. Tức là  $3k < 25$ .
- Tìm giá trị  $k$  phù hợp

$$3k < 25$$

$$\Rightarrow k < \frac{25}{3}$$

$$\Rightarrow k < 8.33...$$

Vì  $k$  là số nguyên không âm ( $0, 1, 2, 3, \dots$ ), nên  $k$  có thể là  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . (Với  $k=8$ ,  $3 \times 8 = 24$  vẫn nhỏ hơn 25; nhưng  $k=9$  sẽ cho  $3 \times 9 = 27$  không thỏa mãn.)

- Liệt kê bội số

$$k=0 \rightarrow 3 \times 0 = 0$$

$$k=1 \rightarrow 3 \times 1 = 3$$

$$k=2 \rightarrow 3 \times 2 = 6$$

$$k=3 \rightarrow 3 \times 3 = 9$$

$$k=4 \rightarrow 3 \times 4 = 12$$

$$k=5 \rightarrow 3 \times 5 = 15$$

$$k=6 \rightarrow 3 \times 6 = 18$$

$$k=7 \rightarrow 3 \times 7 = 21$$

$$k=8 \rightarrow 3 \times 8 = 24$$

- Kết luận: Các bội số của 3 nhỏ hơn 25 là: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

## Bài 12:

Xét  $B = 2 \times 3 \times 7 + 1 = 42 + 1 = 43$ . Hỏi  $B$  có nguyên tố không.

Cần kiểm tra 43 có ước nào nhỏ hơn nó (trừ 1).

Thử các ước “nhỏ” là 2, 3, 5, 7... (đến 21 là  $43/2$ )

43 chia 2 dư 1

43 chia 3 dư 1

43 chia 5 dư 3

43 chia 7 dư 1

43 chia 9 dư 7

43 chia 11 dư 10

43 chia 13 dư 4

43 chia 17 dư 9

43 chia 19 dư 5

Không thấy 43 chia hết cho bất kỳ số nào ở trên.

Vậy 43 không có ước nào ngoài 1 và 43, nên 43 là số nguyên tố. (Nếu đề muốn “chứng minh  $B$  là hợp số”, có lẽ thay 1 bằng một giá trị khác.

Nhưng với “+1” ở đây, hoá ra 43 lại là số nguyên tố.

Cần đọc kỹ đề: “Chứng minh ... là hợp số hay không?”

→ Kết luận 43 là nguyên tố, không phải hợp số.)

### **Bài 13:**

Tìm các  $n < 200$  sao cho  $n$  chia hết 4 và  $n$  chia hết 6.

Chia hết 4 và 6  $\Rightarrow$  phải chia hết  $\text{BCNN}(4, 6)$ .

$$\text{BCNN}(4, 6) = 12.$$

Các bội số của 12 nhỏ hơn 200: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192. (Tiếp theo 204 > 200).

Vậy tập hợp tất cả:

$$\{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192\}.$$

### **Bài 14:**

Tìm  $m < 100$  để:

$$m \text{ chia } 3 \text{ dư } 1 \ (m \equiv 1 \pmod{3}).$$

$$m \text{ chia } 5 \text{ dư } 2 \ (m \equiv 2 \pmod{5}).$$

$$m \text{ chia } 7 \text{ dư } 4 \ (m \equiv 4 \pmod{7}).$$

Cách giải (tóm tắt):

Liệt kê số  $\equiv 1 \pmod{3}$ : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 79, 82, 85, 88, 91, 94, 97... (dưới 100).

Trong dãy đó, chọn những số  $\equiv 2 \pmod{5}$ : nghĩa là chia 5 dư 2  $\rightarrow$  có dạng  $5k + 2$ .

Thí dụ: 7 ( $5 \times 1 + 2$ ), 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72, 77, 82, 87, 92, 97...

Giao với dãy 1 ( $\pmod{3}$ ), ta tìm được: 7, 22, 37, 52, 67, 82, 97 (đều  $\equiv 1 \pmod{3}$  và  $\equiv 2 \pmod{5}$ ).

Bây giờ kiểm tra  $\equiv 4 \pmod{7}$  trong những số trên:

7 ( $\pmod{7}$ ) = 0  $\rightarrow$  không đạt.

22 ( $\pmod{7}$ ) = 1  $\rightarrow$  không.

37 ( $\pmod{7}$ ) = 2  $\rightarrow$  không.

52 ( $\pmod{7}$ ) = 3  $\rightarrow$  không.

67 ( $\pmod{7}$ ) = 4  $\rightarrow$  đúng.

82 ( $\pmod{7}$ ) = 5  $\rightarrow$  không.

97 ( $\pmod{7}$ ) = 6  $\rightarrow$  không.

Vậy  $m = 67$  thỏa mãn cả ba điều kiện và  $67 < 100$ .

### Bài 15:

Vì khi chia làm nhóm 3, nhóm 4, nhóm 6, nhóm 9 đều vừa đủ nhóm nên số học sinh lớp 6B là bội chung của 3; 4; 6 và 9.

Ta tìm được bội chung nhỏ nhất của 3; 4; 6 và 9 là 36 (HS tự tính toán)

Vậy  $BC(3, 4, 6, 9) = \{0; 36; 72; 108; ....\}$ .

Mà số học sinh trong khoảng 30 đến 40 học sinh. Vậy số học sinh lớp 6B là 36 học sinh