

4. Đáp án phần lũy thừa

Bài 1: $2^3 = 8$, $3^2 = 9$, nên $8 \times 9 = 72$.

Kết quả: 72.

Bài 2: $16 = 2^4$, nên $2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$.

Kết quả: 4.

Bài 3: $3^4 = 81$, $4^3 = 64$, vì $81 > 64$ nên $3^4 > 4^3$.

Kết quả: $3^4 > 4^3$.

Bài 4: $5^3 = 125$, $125 \div 5 = 25$ (số nguyên), nên chia hết.

Kết quả: Đã chứng minh.

Bài 5: $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$.

Kết quả: 16.

Bài 6: $27 = 3^3$, nên $3^{x+1} = 3^3 \Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$.

Kết quả: 2.

Bài 7: $2^5 = 32$, $5^2 = 25$, vì $32 > 25$ nên $2^5 > 5^2$.

Kết quả: $2^5 > 5^2$.

Bài 8: $7^2 = 49$, $49 \div 7 = 7$ (số nguyên), nên chia hết.

Kết quả: Đã chứng minh.

Bài 9: $10^3 = 1000$, $10^2 = 100$, nên $1000 \div 100 = 10$.

Kết quả: 10.

Bài 10: $4 = 2^2$, $64 = 2^6$, nên $(2^2)^x = 2^{2x} = 2^6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$.

Kết quả: 3.

Bài 11: $2^{10} = 1024$, $10^2 = 100$, vì $1024 > 100$ nên $2^{10} > 10^2$.

Kết quả: $2^{10} > 10^2$.

Bài 12: $2^{10} = 1024$, $4 = 2^2$, vì $10 > 2$ nên 2^{10} chia hết cho 2^2 ($1024 \div 4 = 256$, số nguyên).

Kết quả: Đã chứng minh.

Bài 13: $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4 \times 9 = 36$, $36^2 = 1296$.

Kết quả: 1296.

Bài 14: $25 = 5^2$, nên $5^{2x} = 5^2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$.

Kết quả: 1.

Bài 15: $3^3 = 27$, $2^4 = 16$, vì $27 > 16$ nên $3^3 > 2^4$.

Kết quả: $3^3 > 2^4$.

Bài 16: $3^4 = 81$, $9 = 3^2$, vì $4 > 2$ nên 3^4 chia hết cho 3^2 ($81 \div 9 = 9$, số nguyên).

Kết quả: Đã chứng minh.

Bài 17: $2^4 = 16$, $5^2 = 25$, nên $16 \times 25 = 400$.

Kết quả: 400.

Bài 18: $8 = 2^3$, nên $2^{x-1} = 2^3 \Rightarrow x-1 = 3 \Rightarrow x = 4$.

Kết quả: 4.

Bài 19: $4^2 = 16$, $2^4 = 16$, nên $4^2 = 2^4$.

Kết quả: $4^2 = 2^4$.

Bài 20: $10^5 = 100000$, $100 = 10^2$, vì $5 > 2$ nên 10^5 chia hết cho 10^2 ($100000 \div 100 = 1000$, số nguyên).

Kết quả: Đã chứng minh.

Bài 21: Tính giá trị của biểu thức: $A = \left(\frac{2^3 \times 3^2}{4^2 \times 3} \right)^2 \times 5^0$

Bước 1: Tính 5^0 : $5^0 = 1$

Bước 2: Rút gọn biểu thức trong ngoặc: $4^2 = (2^2)^2 = 2^4$

$$\frac{2^3 \times 3^2}{4^2 \times 3} = \frac{2^3 \times 3^2}{2^4 \times 3^1} = \frac{2^3}{2^4} \times \frac{3^2}{3^1} = 2^{3-4} \times 3^{2-1} = 2^{-1} \times 3^1 = \frac{3}{2}$$

Bước 3: Bình phương: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

Bước 4: Tính A : $A = \frac{9}{4} \times 1 = \frac{9}{4}$

Đáp số: $A = \frac{9}{4}$.

Bài 22:

Tìm số nguyên x thỏa mãn phương trình: $2^{x+1} = 8 \times 4^{x-2}$

Bước 1: Biểu diễn các cơ số về cùng cơ số 2: $8 = 2^3$

$$4 = 2^2 \Rightarrow 4^{x-2} = (2^2)^{x-2} \Rightarrow 4^{x-2} = 2^{2(x-2)} = 2^{2x-4}$$

Về phải: $8 \times 4^{x-2} = 2^3 \times 2^{2x-4} = 2^{3+2x-4} = 2^{2x-1}$

Bước 2: Phương trình trở thành: $2^{x+1} = 2^{2x-1}$

Bước 3: Vì hàm lũy thừa cơ số 2 là hàm đồng biến, ta có:

$$x+1=2x-1$$

$$1+1=2x-x$$

$$2=x$$

Bước 4: Kiểm tra:

Với $x = 2$: $2^{2+1} = 2^3 = 8$

$$4^{2-2} = 4^0 = 1 \Rightarrow 8 \times 1 = 8$$

Đúng.

Đáp số: $x = 2$.

Bài 23: So sánh hai số: 2^{10} và 3^7

Để so sánh mà không tính giá trị cụ thể, ta thử đưa về cùng cơ số hoặc so sánh thông qua lôgarit hoặc căn bậc.

Thử cách so sánh bằng lũy thừa:

$$2^{10} = (2^5)^2 = 32^2 = 1024$$

$$3^7 = 3 \times 3^6 = 3 \times 729$$

Ước lượng: $729 \approx 700, 3 \times 700 = 2100$

Nhưng tính chính xác: $3^6 = 729, 3^7 = 729 \times 3 = 2187$

So sánh: $1024 < 2187$

Vậy: $2^{10} < 3^7$

Cách khác: So sánh lôgarit (phù hợp hơn cho lớp 7 là ước lượng):

$$2^{10} = 1024, 3^7 = 2187$$

Rõ ràng $1024 < 2187$.

Đáp số: $2^{10} < 3^7$.

Bài 24: Chứng minh rằng số $5^n - 2^n$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n .

Sử dụng phương pháp xét modulo 3:

Một số chia hết cho 3 nếu tổng các chữ số của nó (hoặc giá trị modulo 3) bằng 0.

Xét 5^n và 2^n modulo 3:

Với 5:

$$5 \div 3 = 1 \text{ dư } 2 \text{ nên } 5 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$5^n \equiv 2^n \pmod{3}$$

Với 2:

$$2 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2^n \equiv 2^n \pmod{3}$$

Do đó:

$$5^n - 2^n \equiv 2^n - 2^n \equiv 0 \pmod{3}$$

Vậy $5^n - 2^n$ chia hết cho 3.

Cách khác: Dùng quy nạp:

Với $n=1$: $5^1 - 2^1 = 5 - 2 = 3$

Chia hết cho 3.

Giả sử với $n=k$, $5^k - 2^k$ chia hết cho 3, tức là:

$$5^k - 2^k = 3m (m \in \mathbb{Z})$$

Xét $n=k+1$:

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 2^{k+1} &= 5 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 5 \cdot (5^k - 2^k + 2^k) - 2 \cdot 2^k = 5 \cdot (5^k - 2^k) + 5 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 5 \cdot (5^k - 2^k) + (5-2) \cdot 2^k = 5 \cdot (5^k - 2^k) + 3 \cdot 2^k \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, $5^k - 2^k$ chia hết cho 3, nên $5 \cdot (5^k - 2^k)$ chia hết cho 3.

Hơn nữa, $3 \cdot 2^k$ rõ ràng chia hết cho 3.

Do đó, $5^{k+1} - 2^{k+1}$ chia hết cho 3.

Kết luận: $5^n - 2^n$ chia hết cho 3 với mọi n .

Đáp số: Đã chứng minh $5^n - 2^n$ chia hết cho 3.

Bài 25: Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn: $3^{2x-1} = 27$

Biểu diễn 27 theo cơ số 3: $27 = 3^3$

Phương trình trở thành: $3^{2x-1} = 3^3$

Vì hàm lũy thừa cơ số 3 là đồng biến, ta có: $2x-1=3$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Kiểm tra: Với $x=2$: $3^{2 \cdot 2 - 1} = 3^{4-1} = 3^3 = 27$

Đúng.

Xét nghiệm khác:

Nếu $2x - 1 \neq 3$, thì $3^{2x-1} \neq 3^3$.

Vì x là số nguyên, không có giá trị nào khác thỏa mãn.

Đáp số: $x = 2$.