

2. Đáp án số thực

Bài 1: Gọi $x = 0, (45)$. Nhân cả hai vế với 100: $100x = 45, (45)$. Trừ hai phương trình:

$$100x - x = 45, (45) - 0, (45) \Rightarrow 99x = 45 \Rightarrow x = \frac{99}{45} = \frac{5}{11}.$$

Kết quả: $\frac{5}{11}$.

Bài 2: Căn bậc hai số học của 49 là $\sqrt{49} = 7$.

Kết quả: 7.

Bài 3: Từ $\sqrt{x} = 6$, bình phương hai vế: $x = 6^2 = 36$.

Kết quả: 36.

Bài 4: Tính từng căn: $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5$. Vậy $8 + 3 - 5 = 6$.
Kết quả: 6.

Bài 5: Ta có $2,3 = \frac{23}{10}$. Bình phương: $\left(\frac{23}{10}\right)^2 = \frac{529}{100} = 5,29$. Vì

$5 < 5,29$, nên $\sqrt{5} < 2,3$.

Kết quả: $\sqrt{5} < 2,3$.

Bài 6: Để $\sqrt{x-3}$ có nghĩa, yêu cầu $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$.

Kết quả: $x \geq 3$.

Bài 7: Giả sử $\sqrt{5}$ là hữu tỉ, tức $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, và $\frac{a}{b}$

tối giản. Bình phương cả 2 vế ta có: $5 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 5b^2$. Vậy a^2 chia

hết cho 5, suy ra a chia hết cho 5 (vì 5 là số nguyên tố). Đặt

$a = 5k (k \in \mathbb{Z})$, thay vào: $(5k)^2 = 5b^2 \Rightarrow 25k^2 = 5b^2 \Rightarrow 5k^2 = b^2$,

nên b^2 chia hết cho 5, b chia hết cho 5. Vậy a và b đều chia hết cho 5, mâu thuẫn với giả thiết tối giản. Do đó, $\sqrt{5}$ là vô tỉ.

Kết quả: Đã chứng minh.

Bài 8: Từ $\sqrt{x} = 4\sqrt{3}$, bình phương hai vế: $x = (4\sqrt{3})^2 = 16 \times 3 = 48$.

Kết quả: $x = 48$.

Bài 9: Ta có $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$. Vậy $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$.

Kết quả: 6.

Bài 10: Gọi $x = 0,666\dots$. Nhân với 10: $10x = 6,666\dots$. Thực hiện

$$10x - x = 6,666\dots - 0,666\dots$$

phép trừ, ta có

$$\Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad ..$$

Kết quả: $\frac{2}{3}$.

Bài 11: Từ $\sqrt{x} = 8$, bình phương hai vế: $x = 8^2 = 64$.

Kết quả: 64.

Bài 12: Tính từng căn: $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{1} = 1$. Vậy

$$10 - 4 + 1 = 7.$$

Kết quả: 7.

Bài 13: Ta có $3,6 = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$. Bình phương: $\left(\frac{18}{5}\right)^2 = \frac{324}{25} = 12,96$.

Vì $13 > 12,96$, nên $\sqrt{13} > 3,6$.

Kết quả: $\sqrt{13} > 3,6$.

Bài 14: Để $\sqrt{5x+10}$ có nghĩa, ta cần

$$5x+10 \geq 0 \Rightarrow 5x \geq -10 \Rightarrow x \geq -2.$$

Kết quả: $x \geq -2$.

Bài 15: Giả sử $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ là hữu tỉ, tức $\sqrt{7} + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$b \neq 0. \text{ Bình phương: } 7 + 2\sqrt{14} + 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 9 + 2\sqrt{14} = \frac{a^2}{b^2}. \text{ Suy ra}$$

$$2\sqrt{14} = \frac{a^2}{b^2} - 9, \text{ bên trái là vô tỉ, bên phải là hữu tỉ, dẫn đến mâu}$$

thuẫn. Do đó, $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ là vô tỉ.

Kết quả: Đã chứng minh.

Bài 16: Từ $\sqrt{x+5} = 3$, bình phương hai vế: $x+5=9 \Rightarrow x=4$.

Kết quả: $x=4$.

Bài 17: Ta có $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$. Vậy $6\sqrt{2} \div \sqrt{2} = 6$.

Kết quả: 6.

Bài 18: Gọi $x = 2,1(23)$. Tách thành $x = 2,1 + 0,0(23)$. Đặt

$$y = 0,0(23), \text{ nhân với } 100: 100y = 2,3(23), \text{ trừ:}$$

$$100y - y = 2,3(23) - 0,0(23) \Rightarrow 99y = 2,3 \Rightarrow y = \frac{2,3}{99} = \frac{23}{990}. \text{ Vậy}$$

$$x = 2,1 + \frac{23}{990} = \frac{21}{10} + \frac{23}{990}. \text{ Đưa về mẫu số chung } 990:$$

$$\frac{21 \times 99}{990} + \frac{23}{990} = \frac{2079 + 23}{990} = \frac{2102}{990} = \frac{1051}{495}.$$

Kết quả: $\frac{1051}{495}$.

Bài 19: Từ $\sqrt{y} = \sqrt{10}$, bình phương hai vế: $y = 10$.

Kết quả: 10.

Bài 20: Tính từng căn: $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{4} = 2$. Vậy

$$11 + 6 - 2 = 15.$$

Kết quả: 15.

Bài 21: a, Số $0.123123123\dots$ có phần thập phân lặp lại với chu kì là 123, nên đây là số thập phân vô hạn tuần hoàn. Theo định nghĩa, mọi số thập phân vô hạn tuần hoàn đều là số hữu tỉ. Do đó, $0.123123123\dots$ là số hữu tỉ.

b, Gọi $x = 0.123123123\dots$

Nhân cả hai vế với $10^3 = 1000$ (vì chu kì là 3 chữ số):

$$1000x = 123.123123123\dots$$

Trừ phương trình ban đầu:

$$1000x - x = 123.123123123\dots - 0.123123123\dots$$

$$999x = 123$$

$$x = \frac{123}{999}$$

Rút gọn phân số: $\frac{123}{999} = \frac{123 \div 3}{999 \div 3} = \frac{41}{333}$

Kiểm tra 41 và 333: 41 là số nguyên tố, $333 = 3 \times 111 = 3 \times 3 \times 37$,

không có ước chung ngoài 1. Vậy $\frac{41}{333}$ là tối giản.

Đáp số:

a) Số này là số hữu tỉ vì là số thập phân vô hạn tuần hoàn.

b) $\frac{41}{333}$.

Bài 22: Tìm số x sao cho: $\sqrt{x+5} = 4$

Bình phương hai vế để loại căn:

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = 4^2$$

$$x+5=16$$

$$x=16-5=11$$

Kiểm tra: Nếu $x=11$, thì: $\sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4$

Đúng.

Đáp số: $x=11$.

Bài 23: Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{18} \times \sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$

Bước 1: Rút gọn từng căn:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$$

Bước 2: Tính tích:

$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36} = 6$$

Hoặc: $\sqrt{18} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3 \times 2 = 6$

Bước 3: Thay vào biểu thức:

$$A = 6 - \sqrt{50} + \sqrt{128}$$

$$= 6 - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$$

Bước 4: Rút gọn:

$$-5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = (8-5)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$A = 6 + 3\sqrt{2}$$

Kiểm tra dạng khác: Nếu không rút gọn trước:

$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = 6$$

$$A = 6 - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2}$$

Kết quả nhất quán.

Đáp số: $6 + 3\sqrt{2}$.

Bài 24: So sánh: $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{5} + \sqrt{5}$

Bước 1: Rút gọn về phải:

$$\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Bước 2: So sánh $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ và $2\sqrt{5}$.

Vì các số đều dương, ta bình phương hai vế để loại căn:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$$

$$= 7 + 2\sqrt{21} + 3 = 10 + 2\sqrt{21}$$

$$(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$$

Bước 3: So sánh $10 + 2\sqrt{21}$ và 20:

$$\sqrt{21} \approx 4.583, 2\sqrt{21} \approx 9.166$$

$$10 + 2\sqrt{21} \approx 10 + 9.166 = 19.166$$

$$19.166 < 20$$

Do đó: $10 + 2\sqrt{21} < 20$

Vậy: $\sqrt{7} + \sqrt{3} < 2\sqrt{5}$

Đáp số: $\sqrt{7} + \sqrt{3} < \sqrt{5} + \sqrt{5}$.

Bài 25: Chứng minh rằng $\sqrt{6}$ là số vô tỉ.

Giả sử $\sqrt{6}$ là số hữu tỉ, tức là $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương, $\text{UCLN}(a, b) = 1$.

Bình phương hai vế: $(\sqrt{6})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

$$6 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = 6b^2$$

Phân tích:

a^2 chia hết cho 6, nên a^2 chia hết cho cả 2 và 3 (vì $6 = 2 \cdot 3$).

Theo định lý về số nguyên tố, nếu p là số nguyên tố và a^2 chia hết cho p , thì p là ước của a .

Với $p = 2$ ta có: a^2 chia hết cho 2, nên a chia hết cho 2, tức là $a = 2k (k \in \mathbb{Z})$.

Thay vào, ta có:

$$(2k)^2 = 6b^2 \Rightarrow 4k^2 = 6b^2 \Rightarrow 2k^2 = 3b^2 \Rightarrow 2k^2 - 2b^2 = b^2$$

Suy ra b^2 chia hết cho 2, nên b chia hết cho 2, tức là $b = 2l (l \in \mathbb{Z})$.

Khi đó a và b đều chia hết cho 2, điều này mâu thuẫn với

$$\text{UCLN}(a, b) = 1$$

Do đó, $\sqrt{6}$ không phải số hữu tỉ, tức là số vô tỉ.

Đáp số: $\sqrt{6}$ là số vô tỉ