ĐỀ 8

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Ta có: $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$

$$= \frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta $(\sqrt{x}+1)$ và $\frac{9}{\sqrt{x}+1}$ ta có:

$$\sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1)(\frac{9}{\sqrt{x}+1})}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1)(\frac{9}{\sqrt{x}+1})} - 2$$

$$\Leftrightarrow P \geq 4$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+1 = \frac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy min P = 4 tại x = 4.

b) Ta có $a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca} = 0$

$$\Leftrightarrow 2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 + (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c > 0$$

$$Thay\ vào\ P = 2023 + 2024 + 2025 = 6072.$$

Câu 2:

∆ **Xác định số phần tử của S**

Các số từ 100 đến 999 ⇒ tổng cộng 999 – 100 + 1 = 900 số.

∆ **Tìm các bội của 8 trong khoảng 100 đến 999**

Bội nhỏ nhất của 8 ≥ 100: 8 × 13 = 104 8 (vì 8 × 12 = 96 < 100).

Bội lớn nhất của 8 ≤ 999: 8 × 124 = 992 (vì 8 × 125 = 1000 > 999).

Các bội 8 trong đoạn [100, 999] là 8×13, 8×14,…, 8×124.

∆ **Số bội 8 trong khoảng**

124 – 13 + 1 + 112.

∆ **Xác suất**

Khi chọn ngẫu nhiên 1 số trong S, có 112 số chia hết cho 8 trên tổng 900 số, Xác suất = $\frac{112}{900} = \frac{56}{450} = \frac{28}{225}$

Câu 3:

1) Gọi D là lượng đường ban đầu, p% tương đương $\frac{p}{100}$

Ngày 1: bán p% của D => còn lại cuối ngày: $D(1 - \frac{p}{100})$.

Ngày 2: bán tiếp p% của phần còn lại => cuối ngày 2: $D(1 - \frac{p}{100})^2$.

Tương tự như vậy, sau 4 ngày, lượng đường còn: $D(1 - \frac{p}{100})^4$.

Vì sau 4 ngày, lượng đường còn lại bằng $\frac{1}{125}$ lượng đường ban đầu

⇨ $D(1 - \frac{p}{100})^4 = \frac{1}{125}D$

⇨ $(1 - \frac{p}{100})^4 = \frac{1}{125}$

⇨ $1 - \frac{p}{100} = \frac{1}{5}$

⇨ P = 80%

2) Ta coi hộp đựng bóng là hình trụ với hai đầu của hộp là hai đáy hình trụ

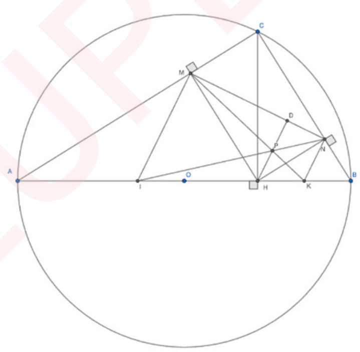
Do đó ta có:

Chiều cao hình trụ: $h = 8r_{bóng} = 32\ cm$

Bán kính đáy trụ: $r_{đáy} = r_{bóng} = 4cm$

Thể tích của hộp đựng bóng: $V_{hộp} = \pi {r_{đáy}}^2 h = \pi . 4^2 . 32 = 1608{,}5\ cm^3$

Câu 4:



a) Tứ giác MCNH có: $\widehat{CMH} = \widehat{CNH} = \widehat{MCN} = 90^\circ$

=> tứ giác MCNH là hình chữ nhật

=> tứ giác MCNH nội tiếp đường tròn, có tâm là giao điểm của hai đường chéo.

b) Xét ΔABC và ΔCHB có:

Góc B chung

$\widehat{ACB} = \widehat{CHB} = 90^\circ$

=> $\Delta ABC \sim \Delta CHB$ (1)

Tương tự: $\Delta CNH \sim \Delta CHB$ (g.g) (2)

$\Delta CNH \sim \Delta NMC$(g.g) (3)

$$Từ\ (1), (2), (3), => \ \Delta ABC \sim \Delta NMC$$

$c)$ $\widehat{NMH} = \widehat{CHM}$ (do CMHN là hình chữ nhật)

$\widehat{IMH} = \widehat{IHM}$ (do MI là đường tung tuyến ứng với cạnh huyền, IM = IH => ΔIMH $cân\ tại\ H$)

⇨ $\widehat{IMN} = \widehat{IHC} = 90^{\circ}$=> IM ⊥ IN (3)

Tương tự: KN ⊥ MN => IM // KN => $\Delta PMI \sim \Delta PKN$

⇨ $\frac{PM}{PK} = \frac{IM}{NK}, mà\ IM = IH, NK = HK => \frac{MP}{PK} = \frac{IH}{HK}$ => HP//IM (4)

Từ (3) và (4) => HP ⊥ MN

d)

Ta có: $MK^2 = MN^2 + NK^2 = HC^2 + (\frac{1}{2}BH)^2, NI^2 = MN^2 + MI^2 = HC^2 + (\frac{1}{2}AH)^2$

⇨ $4(MK^2 + NI^2) = 8HC^2 + BH^2 + AH^2 = 6HC^2 + (HC^2 + BH^2) + (HC^2 + AH^2)$
$= 6HC^2 + AC^2 + BC^2 = 6HC^2 + AB^2$

$$=> \ MK^2 + NI^2 = \frac{3}{2}HC^2 + \frac{1}{4}AB^2$$

Mà độ dài đoạn AB = 2R không đổi nên $MK^2 + NI^2$ đạt giá trị lớn nhất khi HC lớn nhất hay C là điểm chính giữa cung AB.

Câu 5:

Đặt $A = \frac{a+2}{(a+1)^2} + \frac{b+2}{(b+1)^2} + \frac{c+2}{(c+1)^2} = \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) + [\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2}]$ (1)

Đặt $B = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$, $C = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2}$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$, ta có $B = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \ \geq \ \frac{9}{a+b+c+3} = \frac{3}{2}$ (2)

Áp dụng BĐT $x^2 + 1 \geq \frac{(x+1)^2}{2}$, ta có: $C = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} \geq \frac{1}{2}[\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}]$

Suy ra $2C \geq \left[\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\right] \Leftrightarrow 3 - 2C \leq \frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$

⇨ $C \geq \frac{3}{4}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $A = \ B + C \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$