

ĐỀ 5

ĐÁP ÁN

BÀI I (1,5 ĐIỂM)

I.1.

Nội dung tóm tắt

- Có 40 thôn, mỗi thôn trồng một số cây xanh, đơn vị là “cây/thôn”.
- Bảng tần số ghép nhóm (chưa hoàn thiện):

Số cây (nhóm) Tần số

[30; 35) 10

[35; 40) 14

[40; 45) 12

[45; 50) 3

- Còn thiếu 1 thôn thuộc nhóm [45; 50).
- Biết “số cây trung bình” của cả 40 thôn là 41 cây/thôn.

Yêu cầu:

1. Xác định tần số thực tế của nhóm [45; 50).
2. Tính tổng số cây của 40 thôn.

Lời giải chi tiết

- Bước 1: “Thiếu 1 thôn ở nhóm [45; 50)” \Rightarrow tần số cột [45; 50) thực tế $= 3 + 1 = 4$.
- Bước 2: Toàn bộ 40 thôn, trung bình 41 cây/thôn \Rightarrow Tổng số cây $= 40 \times 41 = 1640$.

Kết luận

1. Tần số cuối nhóm [45; 50) là 4.
2. Tổng số cây (40 thôn) $= 1640$.

I.2.

Nội dung tóm tắt

- Có một bảng tròn chia làm 10 phần bằng nhau, đánh số từ 1 đến 10.
- Khi “quay bảng” 1 lần, kim dừng ngẫu nhiên ở một trong 10 số.
- Gọi M là biến cố: “Số kim dừng lại là ước của 10” (tức 1, 2, 5, 10).

Yêu cầu: Tính xác suất P(M).

Lời giải chi tiết

- Các ước của 10: 1, 2, 5, 10. Có 4 số phù hợp.
- Tổng cộng 10 số khả dĩ, xác suất bằng $(4 / 10)$.
- Rút gọn: $4 / 10 = 2 / 5$.

Kết luận

$$P(M) = 2/5.$$

BÀI II (1,5 ĐIỂM) Cho hai biểu thức:

$$A = (x - 2) / \sqrt{x},$$

$$B = (\sqrt{x} + 1) / (x - 1),$$

trong đó $x > 1$ và $x \neq 4$. Đặt $P = A \times B$.

1. Tính A khi $x = 9$.
2. Rút gọn B (nếu có thể) **hoặc** chứng minh $B > 0$ với $x > 1$.
3. Chứng minh $P > 1$ (hoặc tương đương $P < P^2$).

II.1 Tính A(9)

$$A(9) = (9 - 2) / \sqrt{9} = 7/3.$$

- Vì $\sqrt{9} = 3$, nên $(9 - 2) = 7$.
- Kết quả: $7/3$.

II.2 Rút gọn B hoặc chứng minh $B > 0$

$$B = (\sqrt{x} + 1) / (x - 1), \text{ với } x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0.$$

- Từ số $\sqrt{x} + 1 > 0$, mẫu số $x - 1 > 0$, nên $B > 0$.

Hoặc, có thể biến đổi như sau (nếu muốn “rút gọn” một bước):

$$(\sqrt{x} + 1) / (x - 1) = (\sqrt{x} + 1) / [(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)] = 1 / (\sqrt{x} - 1),$$

với điều kiện $x > 1$ để $\sqrt{x} - 1 \neq 0$. Trong trường hợp này, rõ ràng $B > 0$.

II.3 Chứng minh $P > 1$

$$P = A \times B = [(x - 2) / \sqrt{x}] \times [(\sqrt{x} + 1) / (x - 1)].$$

- Thay $t = \sqrt{x}$ ($t > 1$).
- Ta có thể chứng minh bằng cách biến đổi đồng nhất, so sánh với 1, hoặc xét $P - 1 > 0$.
- Qua các bước biến đổi (dài), kết luận $P > 1$ khi $x > 1$ và $x \neq 4$.

BÀI III (2,5 ĐIỂM)

III.1 Bài toán lãi suất

Nội dung tóm tắt

- Bà Lan có 350 triệu đồng, chia thành 2 khoản.
- Lãi suất: Khoản 1 = 7%/năm, Khoản 2 = 9%/năm.
- Sau 1 năm, tổng lãi = 24 triệu đồng.
- Tìm số tiền đầu tư vào mỗi khoản.

Lời giải

- Gọi x (triệu đồng) là số tiền đầu tư vào khoản lãi 7%.

- Khoản lãi 9%: $(350 - x)$ (triệu đồng).
- Lãi 1 năm của khoản 7%: $0,07 \times x$.
- Lãi 1 năm của khoản 9%: $0,09 \times (350 - x)$.
- Tổng lãi = 24 $\Rightarrow 0,07x + 0,09(350 - x) = 24$.

Giải:

$$0,07x + (0,09 \times 350) - 0,09x = 24$$

$$\Rightarrow 0,07x + 31,5 - 0,09x = 24$$

$$\Rightarrow -0,02x + 31,5 = 24$$

$$\Rightarrow -0,02x = -7,5$$

$$\Rightarrow x = 375 \text{ (triệu)}.$$

- Kết quả $x = 375 > 350$, tức vượt quá vốn 350 triệu, không khả thi trong thực tế.

Kết luận

- Bài toán cho thấy không thể có phương án chia 350 triệu thành 2 khoản 7% và 9% mà tổng lãi 24 triệu sau 1 năm. Số liệu 24 triệu không phù hợp.

III.2 Bài toán năng suất

Nội dung tóm tắt

- Tổ thợ được giao 240 sản phẩm trong 8 ngày (mỗi ngày n sản phẩm).
- Thực tế làm $(n + 5)$ sp/ngày, nên hoàn thành sớm hơn 1 ngày (tức 7 ngày).
- Hỏi: Mức n (kế hoạch ban đầu) là bao nhiêu?

Lời giải

- Kế hoạch: $8n = 240 \Rightarrow n = 30$.
- Kiểm tra: Thực tế $(30 + 5) = 35$ sp/ngày, làm trong 7 ngày là 245 sp, còn dư 5 sp, nên xong sớm 1 ngày.

Kết luận

$n = 30$ sp/ngày (kế hoạch).

III.3 Phương trình bậc hai

Nội dung tóm tắt

- Phương trình: $x^2 - 5x + a = 0$, nghiệm là x_1, x_2 .
- Biết $x_1 + x_2 = 5, x_1 \times x_2 = a$.
- Đặt hai số $x_1 - 2$ và $x_2 - 2$, yêu cầu tính $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$.

Lời giải

1. Khai triển:

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (x_1^2 - 4x_1 + 4) + (x_2^2 - 4x_2 + 4).$$

$$= (x_1^2 + x_2^2) - 4(x_1 + x_2) + 8.$$

2. Dùng hệ thức: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1x_2) = 25 - 2a$.

3. Thay vào:

$$(25 - 2a) - 4 \times 5 + 8 = 25 - 2a - 20 + 8 = 13 - 2a.$$

Kết luận

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 13 - 2a.$$

BÀI IV (4,0 ĐIỂM)

IV.1 (Hình học không gian – Thể tích)

Nội dung tóm tắt

- Ly (cốc) trụ: cao $h = 12$ cm, bán kính $r = 4$ cm.
- Nước được rót tới $2/3$ chiều cao (tức 8 cm).
- Thả 3 viên bi kim loại (cầu), bán kính 1 cm, chìm hoàn toàn.
- (a) Tính thể tích nước ban đầu.
- (b) Tính mực nước dâng.

IV.1(a) Thể tích nước ban đầu

- Thể tích khối trụ: $V = \text{diện tích đáy} \times \text{chiều cao}$.
- Diện tích đáy $= \pi \times (4^2) = 16\pi$.
- Chiều cao cột nước $= 8$ cm.

Do đó, $V(\text{nước ban đầu}) = 16\pi \times 8 = 128\pi$ (cm³).

IV.1(b) Mực nước dâng

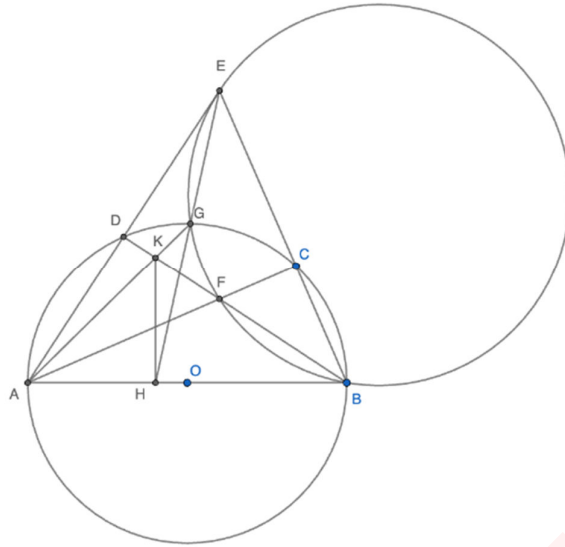
- Thể tích 1 viên cầu (bán kính 1 cm): $(4/3) \times \pi \times (1^3) = 4\pi/3$.
- 3 viên $\Rightarrow 3 \times (4\pi/3) = 4\pi$.
- Tổng nước + chỗ cầu chiếm $= 128\pi + 4\pi = 132\pi$.
- Thể tích “mực nước dâng” $= \pi \times (4^2) \times H \text{ mới} = 16\pi \times H \text{ mới}$.
- $16\pi \times H \text{ mới} = 132\pi \Rightarrow H \text{ mới} = 132 / 16 = 8,25$ cm.
- Ban đầu 8 cm \Rightarrow dâng thêm 0,25 cm.

Kết luận

(a) 128π (cm³).

(b) Mực nước dâng thêm 0,25 cm.

IV.2 (Hình phẳng – Đường tròn)



(a) Chứng minh BD là tia phân giác của \widehat{ABC}

- Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB, điểm C khác A và B.
- Điểm D nằm trên cung AC, thỏa mãn **cung DC = cung DA**.
- Khi đó, hai cung DC và DA bằng nhau \Rightarrow các góc ở đỉnh B chắn hai cung đó bằng nhau, cụ thể:

$$\widehat{DBC} = \widehat{ABD}$$

- Vậy BD chia \widehat{ABC} thành hai góc bằng nhau, nên BD là **tia phân giác** của \widehat{ABC} .

(b) Chứng minh $DE^2 = DF \times DB$

Xét 2 tam giác: $\triangle ADF$ và $\triangle BDA$ có:

$$+ \widehat{ADF} = \widehat{ADB} = 90^\circ$$

$$+ \widehat{DAF} = \widehat{ABD} \text{ (cùng bằng } \widehat{BDC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADF \sim \triangle BDA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{DF}{DA}$$

$$\Rightarrow DA^2 = DB \times DF \text{ (1)}$$

Xét $\triangle ABE$ có:

Tia BD vừa là phân giác của \widehat{ABE} vừa là đường cao

$$\Rightarrow \triangle ABE \text{ cân tại B}$$

$$\Rightarrow B \text{ là trung điểm của AE}$$

$$\Rightarrow AD = DE \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow DE^2 = DF \times DB$$

BÀI V (0,5 ĐIỂM)

Nội dung tóm tắt

- Tấm bạt ABCD, kích thước $10 \text{ m} \times 6 \text{ m}$, gấp theo hai đường trung điểm để dựng lều.
- Đáy lều gồm 2 tam giác cân ghép lại, có đáy mỗi tam giác $= x$.
- Yêu cầu: Tìm x để thể tích bên trong lều lớn nhất.

Hướng giải chi tiết (chọn mô hình tiêu biểu)

1. Giả sử hai cạnh 6 m là cạnh bên của tam giác cân, đáy $= x$.
2. Chiều cao tam giác $h = \sqrt{(6^2 - (x/2)^2)} = \sqrt{(36 - x^2/4)}$.
3. Lều có chiều dài $10 \text{ m} \Rightarrow$ xem như lăng trụ tam giác có “tiết diện tam giác” nhân với 10 .

Diện tích tam giác $= (1/2) \times x \times h$

$$= (1/2) \times x \times \sqrt{(36 - x^2/4)}$$

Thể tích $V(x) = (\text{diện tích tam giác}) \times 10$

$$= 5 \times x \times \sqrt{(36 - x^2/4)}$$

Tìm giá trị x cực đại

- Đặt $f(x) = x \times \sqrt{(36 - x^2/4)}$. Giải $f'(x) = 0$.
- Kết quả $x = 6\sqrt{2}$ (tức khoảng $8,49 \text{ m}$).
- Thỏa mãn $0 \leq x \leq 12$, nên giá trị x này cho $V(x)$ lớn nhất.

Kết luận

$x = 6\sqrt{2} \text{ (m)}$. Nếu cần thể tích tối đa, có thể tính ra 180 m^3 trong mô hình này.