ĐỀ TOÁN 4

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) $P = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$
$P = 4\sqrt{3}$

2) $Q = \dfrac{\sqrt{x}+1-\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}.\left(\sqrt{x}-2\right) \quad \left(x \ge 0, x \ne 4\right)$

$Q = \dfrac{3}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}.\left(\sqrt{x}-2\right)$

$Q = \dfrac{3}{\sqrt{x}+2} \quad \left(x \ge 0, x \ne 4\right)$

$Q = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}+2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Câu 2.

Diện tích xung quanh của tầng trên là: $2\pi.15.15 = 450\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích đáy của tầng trên là: $\pi.15^2 = 225\pi\left(cm^2\right)$

Bán kính của tầng dưới: $40:2 = 20\left(cm\right)$

Diện tích xung quanh của tầng dưới là: $2\pi.20.20 = 800\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích đáy của tầng dưới là: $\pi.20^2 = 400\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích bề mặt trang trí bánh là: $450\pi + 225\pi + 800\pi + 400\pi - 225\pi = 1650\pi\left(cm^2\right)$

Câu 3:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5 \ (1) \\ x - 3y = -1 \ (2) \end{cases}$

Từ $(2) \to x = 3y - 1$

Thay $x = 3y - 1$ vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được.

$2.(3y-1) + y = 5 \to y = 1$

Suy ra. $x = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(2;1)$

2)

a) Ta có. $\Delta = \left(m-1\right)^2 + 4m = m^2 + 2m + 1 = \left(m+1\right)^2$

Vì $(m+1)^2 \geq 0$ với $\forall m$ nên $\Delta \geq 0$ với $\forall m$

Suy ra phương trình luôn có nghiệm x_1, x_2 với mọi m.

b) Theo định lí Viet, ta có. $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = m-1 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = -m \end{cases}$

Theo bài ra ta có. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - 3x_1x_2 = -5$

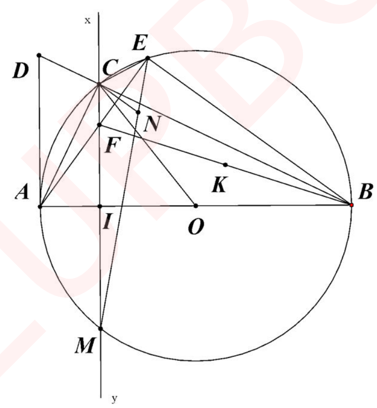
$$x_1x_2(x_1+x_2) - 3x_1x_2 + 5 = 0$$
$$-m(m-1) + 3m = -5$$
$$m^2 - 4m - 5 = 0$$

Giải phương trình trên ta được.

$m=-1$ (thỏa mãn) hoặc $m=5$ (thỏa mãn) .

Vậy $m \in \{-1;5\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 4:



a) Gọi K là trung điểm của BF

Ta có. $\widehat{AEB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó, ΔBEF vuông tại E.

$\Rightarrow KE = \dfrac{1}{2}BF$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông) (1)

Xét tam giác vuông BIF , có $KI = \dfrac{1}{2}BF$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KE = KI = KB = KF = \dfrac{1}{2}BF$

Suy ra, tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn đường kính BF

b) Vì $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ACB} = 90^0$, suy ra ΔACB vuông tại A có CI là đường cao nên. $AC^2 = AI.AB \quad (1)$

Vì AD là tiếp tuyến của (O) nên $AD \perp AB$, suy ra ΔADB vuông ở A, có AC là đường cao nên. $AC^2 = BC \cdot CD \qquad (2)$

$\Delta AIF \sim \Delta AEB(g.g) \to \dfrac{AI}{AE} = \dfrac{FA}{AB} \to AE.FA = AB.AI \quad (3)$

Từ (1),(2) và (3) suy ra $AE.AF = CB.CD$

c) Do $AB = 2AC$ và tam giác ABC vuông tại C nên $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $\widehat{ABC} = 30^0$ do đó. $\widehat{BAC} = 60^0$ suy ra $\widehat{BCM} = \widehat{BMC} = 60^0$. Do đó tam giác BCM đều suy ra $\widehat{MEC} = 60^0$.

Trên đoạn ME lấy N sao cho $NE = EC$, ΔCEN đều, suy ra $CE = CN$. Xét ΔBEC; ΔMNC có.

$\widehat{CNM} = 180° - \widehat{CNE} = 120°$;

Do tứ giác $BECM$ có bốn đỉnh nằm trên (O) nên tứ giác $BECM$ nội tiếp (O), suy ra.

$\widehat{CEB} = 180° - \widehat{CMB} = 120°$

$CE = CN$; $\widehat{CMN} = \widehat{CBE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CE), suy ra. $\widehat{MCN} = \widehat{BCE}$

Do đó. $\Delta BEC = \Delta MNC$ suy ra $BE = MN$

$BE + CE = MN + NE = ME \le AB = 2R$ (Quan hệ đường kính và dây cung) .

Mà $BE + CE \ge 2\sqrt{BE.CE}$ (áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

$BE.CE \le R^2$

$S = 2025.BE.CE \le 2025R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $BE = CE$ và $ME = 2R$ hay E là điểm chính giữa cung nhỏ BC

Câu 5.

1) $P = \dfrac{2}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{2}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}-5}{x-1}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{2}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$= \dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right) + 2\left(\sqrt{x}+1\right) + \sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$= \dfrac{2\sqrt{x} - 2 + 2\sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 5}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$$=\frac{5\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$P=\dfrac{5}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0;x\ne 1$

Vậy $P=\dfrac{5}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0;x\ne 1$

2) $A=\dfrac{a}{b^2+16}+\dfrac{b}{c^2+16}+\dfrac{c}{a^2+16}$

$$A=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{16a}{b^2+16}+\frac{16b}{c^2+16}+\frac{16c}{a^2+16}\right)$$

$$A=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{a\left(b^2+16\right)-ab^2}{b^2+16}+\frac{b\left(c^2+16\right)-bc^2}{c^2+16}+\frac{c\left(a^2+16\right)-ca^2}{a^2+16}\right)$$

$$A=\frac{1}{16}\cdot\left(a-\frac{ab^2}{b^2+16}+b-\frac{bc^2}{c^2+16}+c-\frac{ca^2}{a^2+16}\right)$$

$$A=\frac{1}{16}(a+b+c)-\frac{1}{16}\left(\frac{ab^2}{b^2+16}+\frac{bc^2}{c^2+16}+\frac{ca^2}{a^2+16}\right)$$

$$A=\frac{3}{4}-\frac{1}{16}\left(\frac{ab^2}{b^2+16}+\frac{bc^2}{c^2+16}+\frac{ca^2}{a^2+16}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si ta có.

$b^2+16\ge 2\sqrt{16b^2}=8b$

$c^2+16\ge 8c$

$a^2+16\ge 8a$

Do đó.

$$A\ge\frac{3}{4}-\frac{1}{64}\left(\frac{ab^2}{2b}+\frac{bc^2}{2c}+\frac{ca^2}{2a}\right)$$

$$A\ge\frac{3}{4}-\frac{1}{64}\frac{(a+b+c)^2}{6}$$

$$A\ge\frac{3}{4}-\frac{1}{64}\frac{12^2}{6}$$

$A \geq \frac{3}{8}$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 4$