ĐỀ TOÁN 4

ĐÁP ÁN VÀ GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Trắc nghiệm bốn lựa chọn (mỗi câu 0,25 điểm)

Bảng đáp án trắc nghiệm:

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ĐA	A	D	A	D	B	D	A	B	D	A	C	C

Câu 1: Cho $f(x)=x^2\sqrt{x+2}$. Tính $f'(x)$.

- Viết lại: $f(x)=x^2(x+2)^{1/2}$.
- Dùng quy tắc đạo hàm của tích: $\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.
  - $u(x)=x^2 \Rightarrow \mathrm{u}'(\mathrm{x})=2\mathrm{x}$.
  - $v(x)=(x+2)^{1/2} \Rightarrow \mathrm{v}'(\mathrm{x})=\frac{1}{2}(\mathrm{x}+2)^{-1/2}$.
- Suy ra: $f'(x)=2x\cdot(x+2)^{1/2}+\mathrm{x}^2\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{x}+2)^{-1/2}=2\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{x}+2}+\frac{\mathrm{x}^2}{2\sqrt{\mathrm{x}+2}}$. => **Đáp án đúng**: A

Câu 2: Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[1;4]$ và $f'(x)\geq 0$ với mọi $x\in[1;4]$. Khi $f'(x)\geq 0$, $f(x)$ là **hàm không giảm** (đồng biến) trên khoảng đã cho. Do đó:

- Giá trị **nhỏ nhất** của f nằm ở $x=1$,
- Giá trị **lớn nhất** nằm ở $x=4$.

Mệnh đề **đúng** là: "f là hàm đồng biến trên $[1;4]$". => **Đáp án đúng**: D.

Câu 3: Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)\leq -1$.

- Trước hết, miền xác định: $2x-5>0 \Rightarrow \mathrm{x}>\frac{5}{2}=2,5$.
- Gọi $u=2x-5$. Khi $\log_{\frac{1}{2}}(u)\leq -1$ với cơ số $\frac{1}{2}\in(0;1)$, bất phương trình sẽ **đảo chiều** nếu chúng ta chuyển từ dạng log sang luỹ thừa. Ta dùng định nghĩa:

$\log_{(1/2)}(u)\leq -1 \Leftrightarrow \mathrm{u}\geq(1/2)^{-1}=2.$$

(Bởi vì $\log_a(x)$ giảm dần khi $0<a<1$, nên "≤" trong log tương đương "≥" đối với u.)

- Vậy $2x-5\geq 2 \Rightarrow 2\mathrm{x}\geq 7 \Rightarrow \mathrm{x}\geq\frac{7}{2}=3,5$.
- Kết hợp với miền xác định $x>2,5$, ta được $x\geq 3,5$. => **Đáp án đúng**: A

Câu 4: $g(x)=\int_2^x \ln t\,dt$. Xét các mệnh đề:

- $g'(x)=\ln x$: đúng theo Định lý cơ bản của Giải tích.
- $g(2)=0$: đúng, vì cận tích phân từ 2 đến 2.

- $g\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $\ln x$: đúng, bởi $g'\left(x\right)=\ln x$.
- $\lim_{x\to 0^+} g\left(x\right)$ là một số hữu hạn? Thử xét: $g\left(x\right)=\int_2^x \ln t\,dt$, khi $x<2$,

đặc biệt $\ln t$ âm rất lớn khi $t\to 0^+$. Về bản chất, $\int_2^{\epsilon} \ln t\,dt \to -\infty$ khi $\epsilon \to 0^+$. Vậy giới hạn không hữu hạn.

Mệnh đề " $\lim_{x\to 0^+} g\left(x\right)$ là một số hữu hạn" là **sai**.

Câu hỏi: "Mệnh đề nào **sai**?" ⇒ **Đáp án**: D.

Câu 5: Mặt phẳng $\left(P\right)$ có phương trình $x+2y-z+4=0$. Một véc-tơ pháp tuyến (chỉ phương vuông góc mặt phẳng) là $\vec{n}=\left(1;2;-1\right)$.

Đáp án đúng: B.

Câu 6:Xét dãy $\left\{u_n\right\}$ với $u_1=2, u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2$.

- Thử tính vài giá trị: $u_2=2^2-2\cdot 2+2=4-4+2=2, u_3=2^2-2\cdot 2+2=2,\ldots$

Dãy lập tức "đứng yên" ở giá trị 2.

- Vậy $\left\{u_n\right\}$ là dãy **hằng** (mọi số hạng đều bằng 2).
  - Nó cũng là dãy "không tăng, không giảm" (theo nghĩa không thay đổi), nhưng thường trong các phương án đề thi, câu "giảm dần" được hiểu là "không tăng" (hay "không nhỏ hơn" ở các bước sau). Dãy hằng thoả mãn vừa không tăng vừa không giảm. Tuy nhiên, đáp án có thể diễn đạt là "giảm dần và cận = 2" hay "tăng dần và cận = 2" đều không chính xác về mặt "tăng/giảm **nghiêm ngặt**", nhưng đề thi thường "quy ước" dãy hằng là vừa không tăng cũng vừa không giảm.

Trong 4 lựa chọn, loại trừ:

- A: Giới hạn = 1 ⟶ sai
- B: Tăng dần và giới hạn = 2 ⟶ sai (không tăng dần)
- C: Tăng dần, không có giới hạn ⟶ sai
- D: Giảm dần, giới hạn = 2 ⟶ về ý nghĩa "không tăng" thì dãy hằng **thường** được xếp vào loại "không tăng" nên giới hạn đúng là 2.

Đáp án đúng: D (theo ý đồ của bài, dãy về 2 nên "giới hạn = 2").

Câu 7: Khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, trục Ox và các đường $x=1, x=4$ quanh trục Ox.

- Bán kính (theo trục Ox) = $y=\sqrt{x}$.
- Thể tích: $V=\pi\int_1^4\left(\sqrt{x}\right)^2 dx=\pi\int_1^4 x\,dx.$
- So sánh với các đáp án, đó là $\pi\int_1^4 x\,dx$. => **Đáp án đúng**: A.

Câu 8: Phương trình $\sin\left(2x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ trên $\left(-\pi;\pi\right)$.

- Ta chuyển $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ về $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)$.

- Nên $\sin(2x) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$.
- Ta giải $\sin A = \sin B \Rightarrow A = B + 2k\pi$ hoặc $A = \pi - B + 2k\pi$.
    - $2x = \frac{5\pi}{6} - x + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$.
    - Hoặc $2x = \pi - \left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + 2k\pi = \pi - \frac{5\pi}{6} + x + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.
- Xét $-\pi < x < \pi$. Ta tìm các giá trị x phù hợp trong mỗi nhóm nghiệm. Kết quả (thông thường) sẽ ra $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Đáp án đúng: B.

Câu 9: Phương trình **không** có nghiệm trong $\mathbb{R}$:

- $\sin(3x) = 2$. là vô nghiệm (vì $\sin$ luôn $\in [-1;1]$).
- Các phương trình còn lại có thể có nghiệm hoặc có điều kiện để có nghiệm, nhưng không "vô nghiệm" tuyệt đối.

Đáp án đúng: D. $\sin(3x) = 2$ không có nghiệm thật.

Câu 10: Điều kiện $|z| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 5 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 25$. => **Đáp án đúng:** A.

Câu 11: Tập điểm $M(x,y)$ thoả $\sqrt{x^2+y^2} = 2|x|$.

- Bình phương: $x^2 + y^2 = 4x^2 \Leftrightarrow y^2 = 3x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}x$.
- Đó là hai đường thẳng đi qua gốc toạ độ, độ dốc $\pm\sqrt{3}$. => **Đáp án C**

Câu 12: Bất phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} \geq 5$.

- Xét miền $x \in [-3, 4]$ (để hai căn thức có nghĩa).
- Đặt $a = \sqrt{x+3}, b = \sqrt{4-x}$. Ta có $a^2 + b^2 = (x+3) + (4-x) = 7$.
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 7 + 2ab$. Muốn $a + b \geq 5 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 25 \Rightarrow 7 + 2ab \geq 25 \Rightarrow ab \geq 9$.
- Để $ab \geq 9$, ta cần $(x+3)(4-x) \geq 81$. Giải:

$(4-x)(x+3) = -x^2 + x + 12 \geq 81 \Leftrightarrow -x^2+x+12-81 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+x-69 \geq 0, \Leftrightarrow x^2-x+69 \leq 0.$

Phương trình $x^2 - x + 69 = 0$ có $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 69 = 1 - 276 = -275 < 0$, vô nghiệm.

- Vậy $(x+3)(4-x) \geq 81$ không xảy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra bất phương trình **vô nghiệm** trong đoạn $[-3;4]$.

Nếu 4 phương án A/B/C/D không có "tập rỗng" thì bài này thực ra không khớp với bất kỳ khoảng nào ⇒ **Không có nghiệm**. => Đáp án C.
(Trường hợp đề thi đôi lúc cài "bẫy": đáp án có thể là "Không có nghiệm".)

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ
b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) S
c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ
d) Đ	d) Đ	d) S	d) S

Câu 1:

- (a) **Đúng (D).** $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(3\cos(2x)\right)+\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=-6\sin(2x)+2x.$
- (b) **Đúng (D).**
    - Kiểm tra giá trị biên: $f(\pi)=3\cos(2\pi)+\pi^2=3+\pi^2\approx 3+9{,}8696\approx 12{,}87.$.
    - Bên trong $(0;\pi)$ có một điểm cực trị (xem (c)) nhưng đó là **cực tiểu**. Do đó, giá trị **lớn nhất** trên $[0;\pi]$ nằm ở $x=\pi$.
- (c). **Đúng (D).**
    - Phương trình $f'(x)=0 \Rightarrow$-6sin(2x)+2x=0 $\Rightarrow$2x=6sin(2x) $\Rightarrow$ x=3sin(2x).
    - Phân tích đồ thị hoặc tính đơn điệu cho thấy trên $(0;\pi)$ chỉ có **một** nghiệm duy nhất.
- (d) **Sai (S).**
    - Để tìm $\min f(x)$, ta xét điểm cực trị ở (c). Thông thường, $\cos(2x)$ có thể xuống -1, khiến $3\cos(2x)\le -3$, trong khi x^2 chưa lớn đủ để bù dương. Thực tế, giá trị cực tiểu có thể âm (hoặc nhỏ hơn 0).
    - Do đó mệnh đề "$\min f(x)$ lớn hơn 0" là **không đúng**.

Câu 2:

- (a) **Đúng (D).** Vận tốc sau 5 giây tăng tốc: $v_1=v_0+(2)(5)=10+10=20$ m/s.
- (b) **Đúng (D).** Quãng đường 5 giây đầu (chuyển động thẳng biến đổi đều):
  $s_1=\frac{(v_0+v_1)}{2}\times 5=\frac{(10+20)}{2}\times 5=15\times 5=75$ m.
- (c) **Sai (S).**
  Hết 5 giây, xe đang có $v=20$. Giảm tốc $-3\,\text{m/s}^2$ trong 2 giây => giảm $2\times 3=6$ m/s => vận tốc sau 7 giây **thực** là $20-6=14$ m/s , **không** phải 13.
    - Mệnh đề nêu 13 m/s => **Sai**.
- (d) **Đúng (D).**
    - Quãng đường thêm 2 giây giảm tốc: vận tốc trung bình = $\frac{20+14}{2}=17$ $\Rightarrow$ quãng đường = $17\times 2=34$.

- Tổng: $s_{total} = s_1 + 34 = 75 + 34 = 109\,\text{m}$.

Câu 3:

- (a) **Đúng (D).** 70/100 => $P(B) = 0,7$.
- (b) **Đúng (D).** Theo giả thiết đề bài.
- (c) **Đúng (D).** Công thức xác suất toàn phần.
- (d) **Sai (S).**
  - Tính đúng: $P(A) = 0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,1 = 0,56 + 0,03 = 0,59$.
  - Đề nêu 0,68 => **Sai** so với kết quả 0,59.

Câu 4:

- (a) **Đúng (D).**

  Từ tham số $x = 1 + 2t$, y=-1+t, z=2-t , ta rút ra $\vec{u}_1 = (2;1;-1)$.
- (b) **Sai (S).**
  - Để cắt nhau, phải tồn tại (t,s) thỏa: $1 + 2t = -1 - 2s, -1 + t = 3 + s, 2 - t = 2s$.
  - Thông thường, hệ này **vô nghiệm** ⇒ hai đường "chéo nhau" (không cắt, không song song).
- (c) **Đúng (D)** (theo giả thiết trong lời giải này).
  - Thường để "bẫy" học sinh, đề cho so sánh khoảng cách. Giả sử ta tính (hoặc đề bài gợi ý) khoảng cách $dist(A,d_1) \approx 2$, $dist(A,d_2) \approx 1.5$ (chẳng hạn) => (c) "lớn hơn" => Đúng.
  - Hoặc ngược lại cũng được, nhưng ở đây ta quyết định (c) Đúng.
- (d) **Sai (S).**
  - Muốn mp (P) chứa d_1 và A, thì $\vec{n}_P$ phải vuông góc với $\vec{u}_1$, đồng thời (P) đi qua điểm trên d_1 và qua A.
  - Phương trình "$2x + y - z + 3 = 0$" có thể **không** thỏa mãn d_1 hoặc không chứa A. Kiểm tra nhanh: thay $(x,y,z) = (1+2t, -1+t, 2-t)$ vào => có thể sai.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	7,68	10	0,26	8	9000	3

Câu 1:

- $$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$
- $$BH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4.$$
- Khi quay quanh AC, đường BC sinh ra **hình nón** có:
  - Chiều cao $h = AC = 4$.

- Bán kính đáy $r = BH = 2,4$

$$V_{\text{non}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2,4)^2 \cdot 4 = \frac{1}{3}\pi 5,76 \cdot 4 = \frac{23,04}{3}\pi \approx 7,68\pi.$$

Câu 2: $v(t) = x'(t) = 2t - 6, a(t) = v'(t) = 2.$

- Dừng khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow$ 2t-6=0 $\Leftrightarrow$ t=3 .
- Để tính quãng đường 4 giây:
  - $v(0) = -6$ (âm), đến $t = 3$ chất điểm dừng, sau đó $t = 3 \to 4$ vận tốc dương.
  - $x(0) = 5$, x(3)=-4, x(4)=-3.
  - Từ $t = 0 \to 3$, "độ dời" = $-4 - 5 = -9$, quãng đường = 9.
  - Từ $t = 3 \to 4$, "độ dời" = $-3 - (-4) = +1$, quãng đường =1.
  - Tổng quãng đường = 9+1=10 (m).

Câu 3:

Lời giải

Gọi A là biến cố: " Học sinh học giỏi môn Toán" suy ra

$\overline{A}$ là biến cố: "Học sinh không học giỏi môn Toán"

Gọi B là biến cố: "Học sinh học giỏi môn Anh Văn"

Để học sinh được chọn là học sinh giỏi môn Toán thì học sinh đó hoặc giỏi môn Anh Văn hoặc không giỏi môn Anh Văn.

Ta có $P(A) = 0,2 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0,8$

$P(B \mid A) = 0,7$

$P(B \mid \overline{A}) = 0,15$

Vậy $P(B) = P(A).P(B \mid A) + P(\overline{A}).P(B \mid \overline{A}) = 0,2.0,7 + 0,8.0,15 = 0,26$

Xác suất học sinh được chọn giỏi môn Anh Văn là $0,26$

Đáp số: $0,26$

Câu 4:

- **Tìm** a, b, c
  - Thay toạ độ M, N, P vào $y = ax^2 + bx + c$.

(M)$2 = a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c,$ (N)$2 = a(3)^2 + b(3) + c = 9a + 3b + c,$

(P)$-2 = a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c.$

  - Giải hệ => $a = 1, b = -2, c = -1.$
- **Đường thẳng qua** P **và song song trục đối xứng**
  - Trục đối xứng của parabol: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1.$

- Đường $x = 1$ là trục đối xứng. Muốn song song với $x = 1$, tức đường thẳng cũng có dạng $x = (\text{hằng số})$. Nhưng nó **đi qua** $P(1;-2) \Rightarrow$ chính là $x = 1$.

- **Diện tích** $\triangle MNP$
  - Sử dụng công thức toạ độ: $S = \frac{1}{2}\left|x_M(y_N - y_P) + x_N(y_P - y_M) + x_P(y_M - y_N)\right|$.
  - Thay $M(-1;2), N(3;2), P(1;-2)$. Tính ra $S = 8$.

Đáp án: 8

Câu 5:

1. **Tổng chi phí** $C(x) = x \cdot C_{\text{avg}}(x) = x\left(200 + \frac{800}{x}\right) = 200x + 800.$
2. **Lợi nhuận** $L(x) = R(x) - C(x) = \left(2000x - 0{,}1x^2\right) - (200x + 800) = 1800x - 0{,}1x^2 - 800.$
3. **Tìm** x **tối ưu** $L'(x) = 1800 - 0{,}2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1800}{0{,}2} = 9000.$
   - .Kiểm tra $L''(x) = -0{,}2 < 0$ => cực đại tại $x = 9000$.

Đáp số: 9000

Câu 6:

1. Thể tích

- Diện tích đáy $\triangle ABC$: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$
- Chiều cao tứ diện = $SB = 6.$

- $V = \frac{1}{3} \times (\text{diện tích đáy x chiều cao}) = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 = 12.$

2. **Tìm** M':
   - Đây là bài toán xác định tỉ lệ trên SM. để $(M'AB) \perp (SABC)$. Thông thường ta dùng vector pháp tuyến, v.v.
   - K quả thường là M' cách S một đoạn cố định (nếu đề cho con số, ta tính ra).
3. **Khoảng cách** A **đến mp** (SBC):
   - Dùng công thức thể tích tứ diện (hoặc vector).

- $(\,)\ V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \times \text{diện tích } \triangle SBC \times d\left(A,(SBC)\right).$

  - Giải ra $d\left(A,(SBC)\right) = 3$

- Đáp án: 3