ĐỀ TOÁN 15
ĐÁP ÁN VÀ GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	B	D	A	C	C	A	D	C	A	B	D	A

Câu 1.

Nguyên hàm của e^x là $e^x + C$. **Chọn đáp án B**

Câu 2.

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Chọn đáp án D.

Câu 3.

Độ lệch chuẩn của một mẫu số liệu ghép nhóm được tính theo công thức: $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2}{n}}$,

Trong đó:

- f_i là tần số của nhóm thứ i.
- x_i là giá trị đại diện của nhóm thứ i.
- $\overline{x}$ là giá trị trung bình của mẫu số liệu.
- n là số lượng các giá trị trong mẫu số liệu.

Tính $S_1^2 = 5,9776$

$S_2^2 = 5,9776$

Vậy $S_1 = S_2$

Chọn đáp án A

Câu 4.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1; -3; 5)$ và có một vectơ chỉ phương $(2; -1; 1)$ là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}.$$

Chọn đáp án C

Câu 5.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ được xác định bởi giới hạn:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}.$$

Từ đồ thị hàm số, ta thấy khi $x \to +\infty$ thì $y \to -1/2$

Do đó, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = -1/2$.

Chọn đáp án C

Câu 6.

Bất phương trình $log_2(x-1) < 3$ tương đương với: $x - 1 < 2^3 \Leftrightarrow x - 1 < 8 \Leftrightarrow x < 9$.

Kết hợp với điều kiện $x - 1 > 0$, ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $(1; 9)$.

Chọn đáp án A

Câu 7.

Mặt cầu $(S):(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$ có tâm $I(2;-1;3)$. **Chọn đáp án D**

Câu 8.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy thì $BC \perp (SAB)$. **Chọn đáp án C**

Câu 9.

Tập nghiệm của bất phương trình $2^x \le 4$ là: $(-\infty;2]$. **Chọn đáp án A**

Câu 10.

Có $u_4 = u_1.q^3 = 2.3^3 = 54$. **Chọn đáp án B**

Câu 11.

Mệnh đề sai là: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai Vectơ đối nhau. **Chọn đáp án D**

Câu 12:

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây $(-3;0)$. **Chọn đáp án A**

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)Đ	a)Đ	a)Đ	a)Đ
b)S	b)S	b)S	b)S
c)Đ	c)Đ	c)Đ	c)Đ
d)Đ	d)S	d)S	d)Đ

Câu 1.

a) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$. **Đúng.**

b) Đạo hàm của $f(x) = \sin 2x - x$ là $f'(x) = 2\cos 2x - 1$. **Sai.**

c) $f'(x) = 2\cos 2x - 1$ khi đó $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ và $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 = 0$, suy ra

$x = -\frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{6}$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. **Đúng.**

d) $f(x) = \sin 2x - x$,

$f'(x) = 2\cos 2x - 1$ có nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$,

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$,

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}; f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ là $-\frac{\pi}{2}$. **Đúng.**

Câu 2.

Ta có: $v(6) = 30\ (m/s)$.

Tốc độ của ô tô tại thời điểm 10 (s) tính từ lúc xuất phát là $30 - 5\times 4 = 10\ \text{(m/s)}$.

+) Quãng đường ô tô chuyển động được trong 6 giây đầu tiên là $S_1 = \int_0^6 5t\,dt = 90\ (m)$.

Gọi t_0 là thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô phanh gấp đến lúc dừng lại. Ta có:

$30 - 5\times t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 6$

+) Quãng đường ô tô chuyển động được kể từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng lại là

$S = \int_0^6 (30 - 5t)dt = 90\,\text{(m)}$

Vậy quãng đường ô tô chuyển động được kể từ lúc bắt đầu chuyển động cho đến khi dừng lại là $180\,\text{m}$.

Câu 3.

(a) Số người trả lời "sẽ mua" là 105, số người trả lời "không mua" là 95. Do đó, xác suất $P(B) = \frac{105}{200} = \frac{21}{40}$ và $P(\overline{B}) = \frac{95}{200} = \frac{19}{40}$. **Đúng.**

(b) Xác suất có điều kiện $P(A|B)$ là xác suất mà một người thực sự sẽ mua sản phẩm khi họ đã trả lời "sẽ mua" trong cuộc khảo sát.

Ta có: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Xác suất $P(A \cap B)$ là xác suất mà một người thực sự sẽ mua sản phẩm và họ đã trả lời "sẽ mua" trong cuộc khảo sát. Ta có: $P(A \cap B) = 0{,}7 \cdot \frac{105}{200} = 0{,}3675$.

Do đó, $P(A|B) = \frac{0{,}3675}{\frac{21}{40}} = 0{,}7$. **Sai.**

(c) Theo công thức Bayes, ta có:

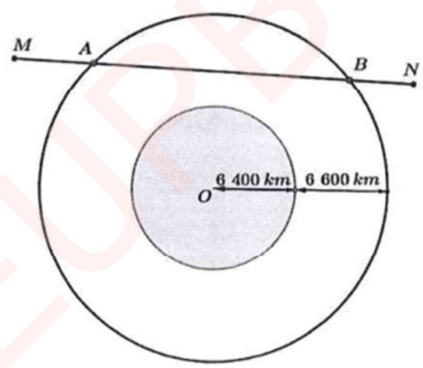
$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

$= 0{,}7 \cdot \frac{21}{40} + 0{,}3 \cdot \frac{19}{40} = 0{,}51$. **Đúng.**

(d) Số người thực sự sẽ mua sản phẩm là 140 (tính theo 70% của 200). Do đó, số người thực sự sẽ mua sản phẩm và đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn là 98 (tính theo 70% của 140).

Tỉ lệ người thực sự sẽ mua sản phẩm và đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn là $\frac{98}{140} \approx 0{,}7$. **Đúng.**

Câu 4.



(a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng MN là $\overrightarrow{MN} = (-12; -32; 16) = 4(-3; -8; 4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng MN là: $\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 20 - 8t, t \in R \\ z = 4t \end{cases}$. **Đúng.**

(b) Để tìm vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi, ta cần tìm điểm giao của đường thẳng MN với mặt cầu có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính $R = 6400$ km.

Phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 6400^2$.

Thay $x = 6 - 3t, y = 20 - 8t$ và $z = 4t$ vào phương trình mặt cầu, ta được:

$$(6 - 3t)^2 + (20 - 8t)^2 + (4t)^2 = 6400^2$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 12t + 36 + 64t^2 - 320t + 400 + 16t^2 = 6400^2$$

$$\Leftrightarrow 97t^2 - 332t - 6399964 = 0$$

Giải phương trình, ta tìm được $t \approx -12{,}17$ hoặc $t \approx 53{,}28$.

Thay $t \approx -12{,}17$ vào phương trình tham số của đường thẳng MN, ta được vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi là điểm $A(-3; -4; 12)$. **Sai.**

(c) Vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi là điểm giao của đường thẳng MN với mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 6600$ km.
Phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 6600^2$.
Thay $x = 6 - 3t, y = 20 - 8t$ và $z = 4t$ vào phương trình mặt cầu, ta được:

$$(6-3t)^2 + (20-8t)^2 + (4t)^2 = 6600^2$$
$$\Leftrightarrow 9t^2 - 12t + 36 + 64t^2 - 320t + 400 + 16t^2 = 6600^2$$
$$\Leftrightarrow 97t^2 - 332t - 6599964 = 0$$

Giải phương trình, ta tìm được $t \approx -12{,}84$ hoặc $t \approx 53{,}71$.
Thay $t \approx 53{,}71$ vào phương trình tham số của đường thẳng MN, ta được vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi.
Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng là khoảng cách giữa hai điểm A và điểm cuối cùng, tính bằng công thức:

$$d = \sqrt{\left(-3-(6-3.53{,}71)\right)^2 + \left(-4-(20-8.53{,}71)\right)^2 + \left(12-(4.53{,}71)\right)^2} \approx 18900 \text{ km.}$$

Đúng.
(d) Thời gian thiên thạch di chuyển từ M đến N là:

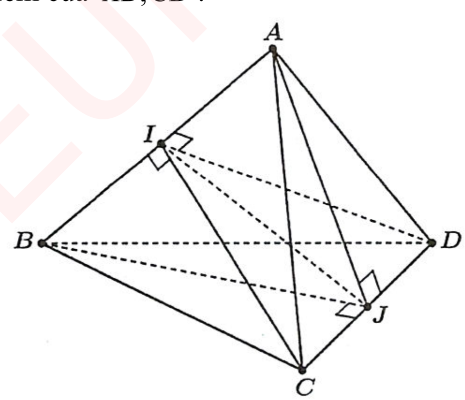
$$t = \frac{\sqrt{\left(6-(-6)\right)^2 + \left(20-(-12)\right)^2 + (0-16)^2}}{3} = 6 \text{ phút.}$$

Do đó, thời gian thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút. **Đúng.**

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	1,41	63	42,5	12,6	2460	262

Câu 1.
Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.



Các tam giác ABC, ABD đều có I là trung điểm AB nên

$$\begin{cases} AB \perp CI \\ AB \perp DI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ICD), \text{mà } IJ \subset (ICD) \Rightarrow AB \perp IJ. \ (1)$$

Tương tự, các tam giác ACD, BCD đều có J là trung điểm CD nên

$$\begin{cases} CD \perp AJ \\ CD \perp BJ \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABJ),$$

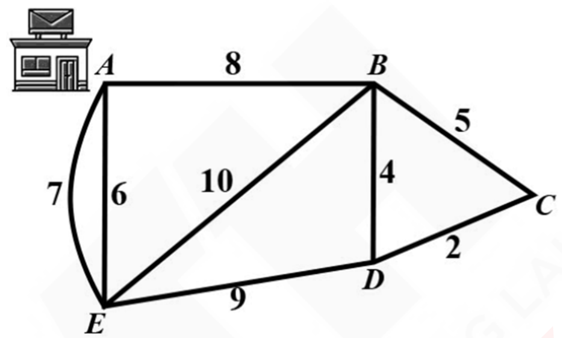
mà $IJ \subset (JAB) \Rightarrow CD \perp IJ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB, CD. Vậy IJ là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD

Ta có: $CI=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}; IJ=\sqrt{CI^2-CJ^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}\approx 1,41$.

Vậy đáp án là 1,41

Câu 2.



Theo sơ đồ đường đi thấy có 2 đỉnh bậc lẻ là A và D nên có thể tìm được một đường đi Euler từ A đến D (đường này đi qua mỗi cạnh đúng một lần).

- Một đường Euler từ A đến D là: AEABEDBCD và độ dài của nó là 6+7+8+10+9+4+5+2= 51
- Đường đi ngắn nhất từ D đến A là DBA và có độ dài là: 4+8 = 12

Vậy tổng quãng đường đưa thư có thể đi ngắn nhất là 51 +12 = 63

Vậy đáp án là 63

Câu 3.

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-5}{5}=\frac{y}{10}=\frac{z-5}{-2}$. Vì M thuộc AB nên tồn tại số thực t sao cho $M(5t+5;\ 10t;\ -2t+5)$. Ngoài ra, M thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $-2t+5=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$. Suy ra $M(17,\ 5;\ 25;\ 0)$. Vậy $a+b=17,5+25=42,5$.

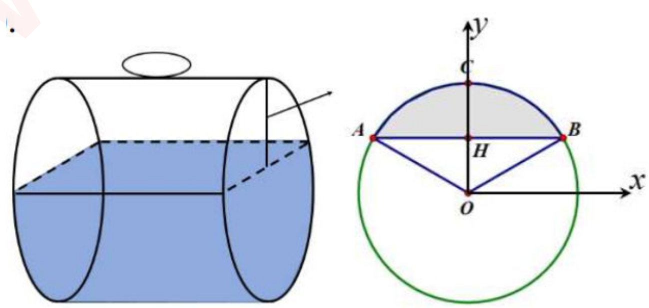
Vậy đáp án là 42,5

Câu 4.

Thể tích của cả bể nhiên liệu là $V=B\cdot h=5\pi\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Gọi V_1 là thể tích phần trống nhiên liệu trong bể.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có diện tích phần tô đậm là

$$S=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}dx=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\cdot\mathrm{d}t-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\cdot\mathrm{d}t-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy thể tích phần trống trong bể là $V_1=\int_0^5\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot 5$.

Vậy thể tích phần nhiên liệu trong bồn là $V_2=V-V_1=5\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)5\approx 12.6\left(\mathrm{~m}^3\right)$.

Vậy đáp án là 12,6

Câu 5.

Đặt $A'M=x\,(0<x<2200)$, $B'M=2200-x$

Ta có $AM=\sqrt{x^2+500^2}$, $BM=\sqrt{(2200-x)^2+600^2}$

Khi đó tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là:

$AM+BM=\sqrt{x^2+500^2}+\sqrt{(2200-x)^2+600^2}$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+500^2}+\sqrt{(2200-x)^2+600^2}$ trên khoảng $(0;2200)$

Đạo hàm $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+500^2}}-\frac{2200-x}{\sqrt{(2200-x)^2+600^2}}=0\Leftrightarrow x=1000$

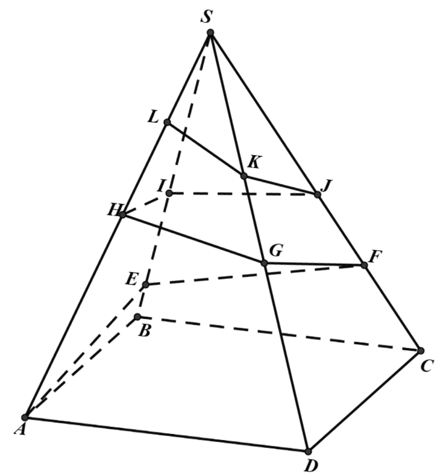
Bảng biến thiên:

x	0		1000		2200
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	2780	↘	2460	↗	2856

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông là khoảng 2460 m, tại vị trí M cách điểm A' là 1000 m.

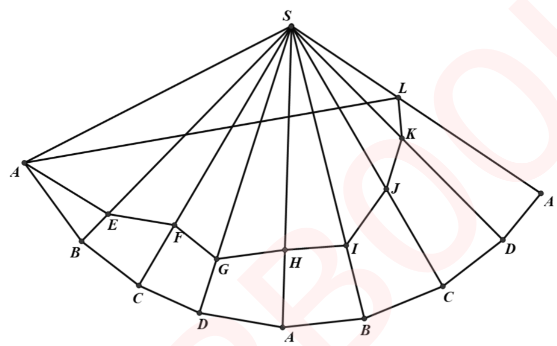
Vậy đáp án là 2460

Câu 6.



Ta sử dụng phương pháp trải đa diện.

Cắt hình chóp theo cạnh bên SA rồi trải ra mặt phẳng hai lần, ta có hình vẽ sau:



Từ đó suy ra chiều dài dây đèn led ngắn nhất là bằng $AL + LS$.

Từ giả thiết về hình chóp đều $S.ABCD$ ta có $\widehat{ASL} = 120°$.

Ta có $AL^2 = SA^2 + SL^2 - 2SA.SL.\cos\widehat{ASL} = 200^2 + 40^2 - 2.200.40.\cos 120° = 49600$.

Nên $AL = \sqrt{49600} = 40\sqrt{31}$.

Vậy, chiều dài dây đèn led cần ít nhất là $40\sqrt{31} + 40 \approx 262$ mét.

Vậy đáp án là 262